

La ubicuidad de los discriminantes

Alicia Dickenstein



Lo que tal vez recuerden

El discriminante **D** de un polinomio **F** de grado 2 en una variable **c**:

$$F = a x^2 + b x + c, \quad D = b^2 - 4ac$$

D se anula precisamente cuando **F** tiene una raíz doble (i.e. cuando las dos raíces coinciden):

F(x) = 0 cuando

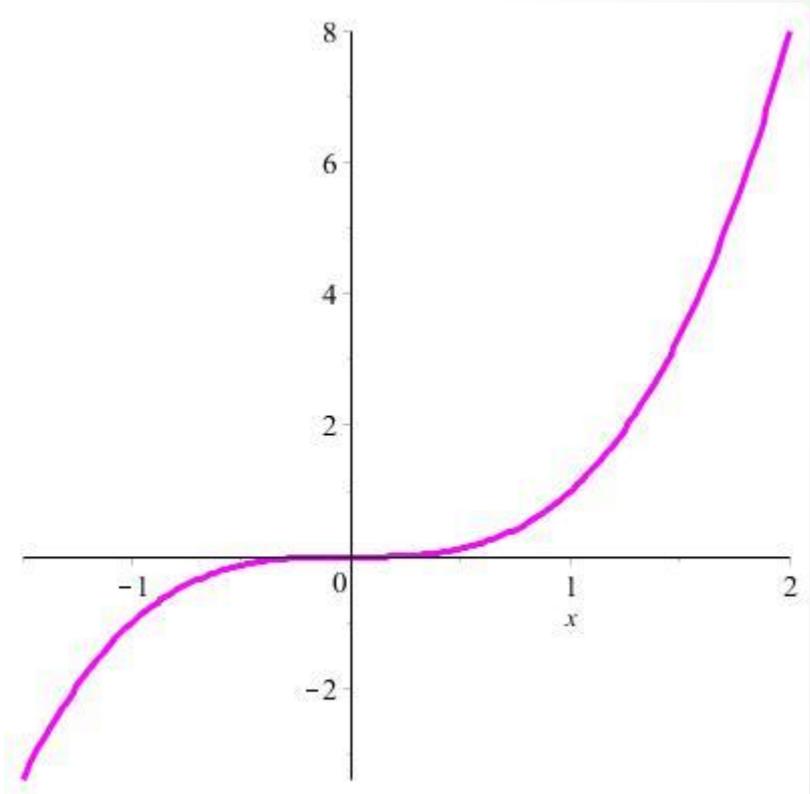
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Lo que tal vez no vieron

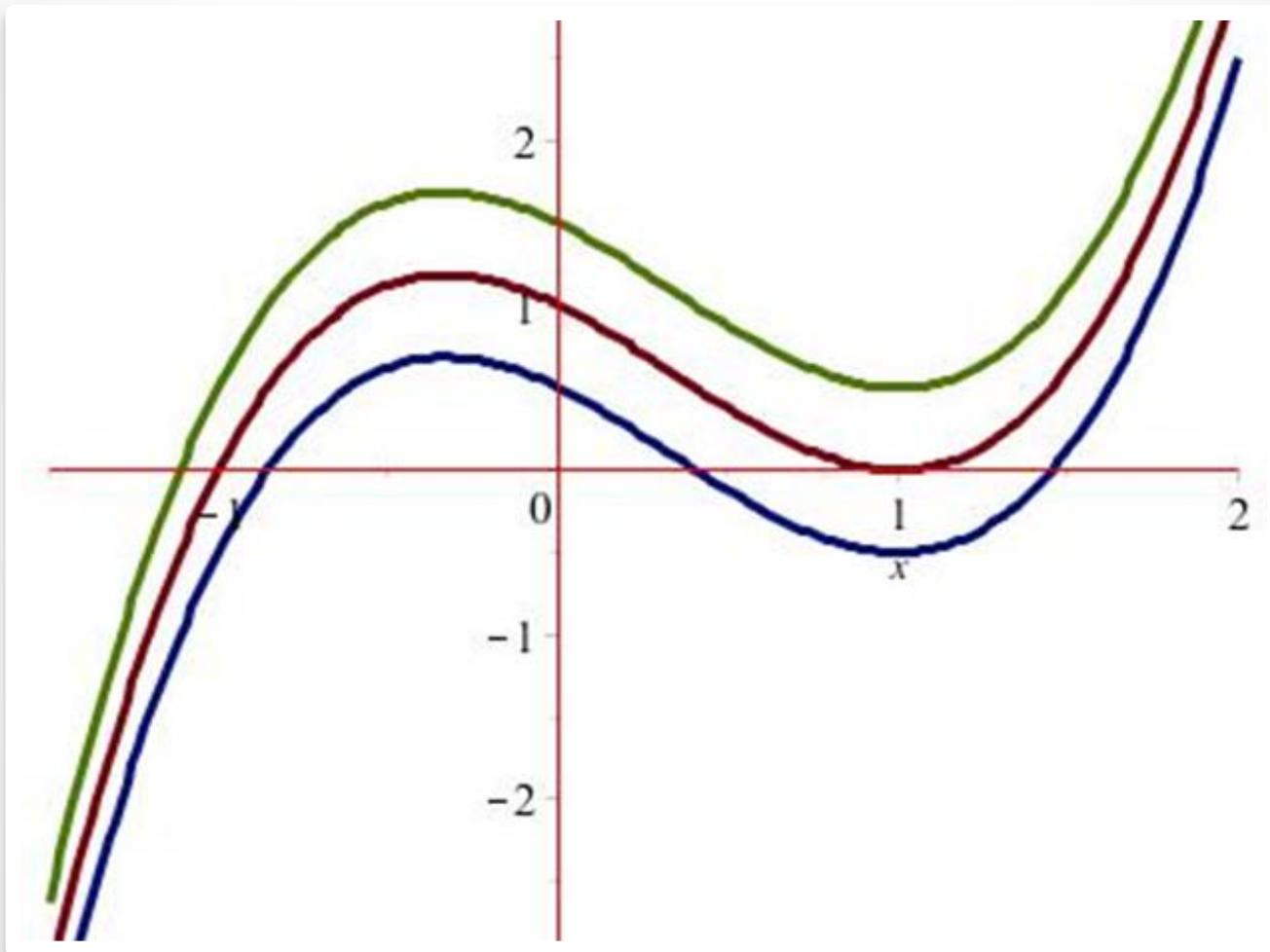
$$F = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

$$D = 27 a^2 d^2 - 18 a b c d + 4 a c^3 + 4 b^3 d + b^2 c^2$$

D se anula cuando **F** tiene una raíz doble o triple



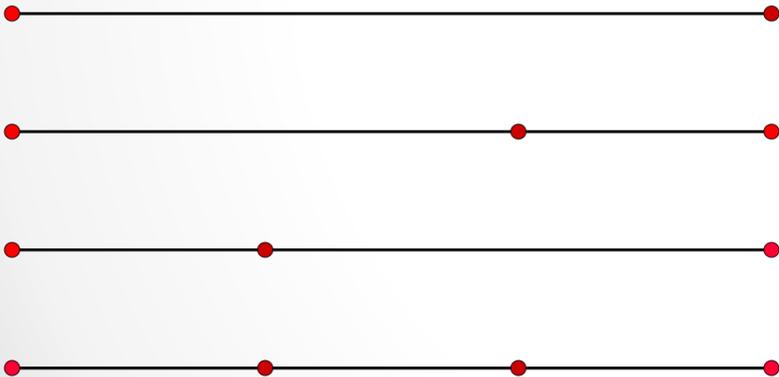
1 raíz, 2 raíces (una doble), tres raíces



D se anula en los coeficientes del polinomio con gráfico marrón

La combinatoria de D

Las cuatro descomposiciones diferentes del $[0,3]$ en segmentos (una triangulación):



Cada triangulación da uno de los términos **rojos**:

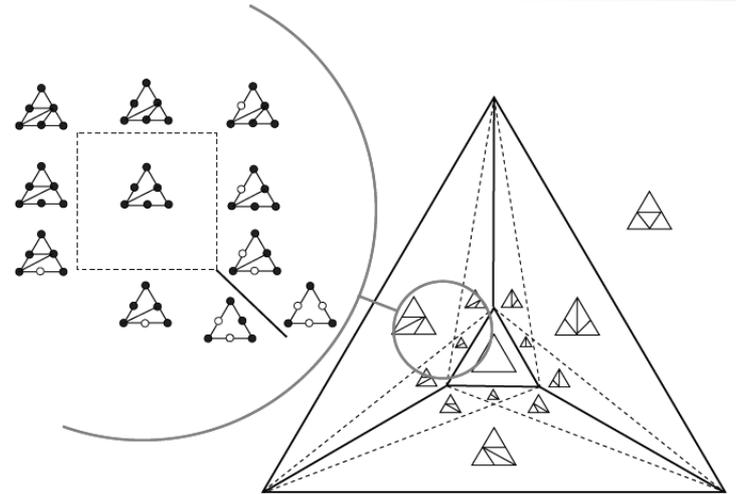
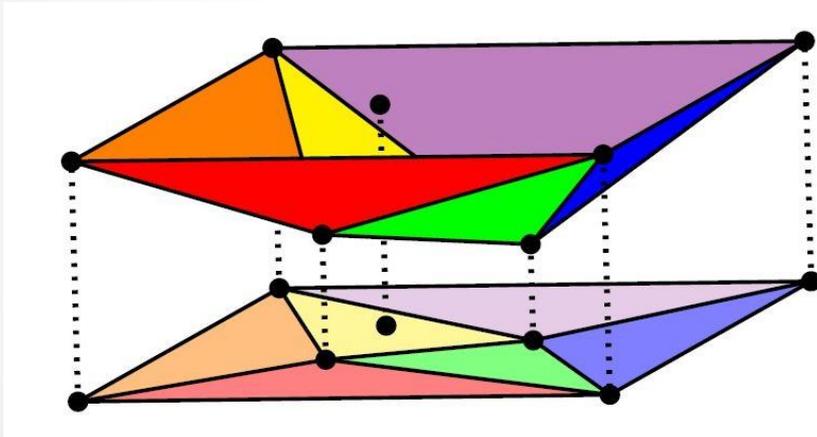
$$D = 27 a^2 d^2 - 18 abcd + 4 ac^3 + 4 b^3 d + b^2 c^2$$

Los coeficientes se pueden describir en términos de las longitudes de los diferentes segmentos:

$$27 = 3^3, 4 = 2^2 \times 1 = 1 \times 2^2, 1 = 1 \times 1 \times 1$$

Resultados similares valen en el caso multivariado

Pero involucran herramientas más complicadas:

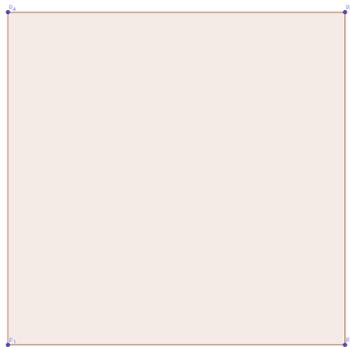


Discriminantes mixtos

C son los vértices $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$, $p_3 = (0, 1)$, $p_4 = (1, 1)$ del cuadrado unidad y tomamos dos polinomios con soporte C :

$$f_1 = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy,$$

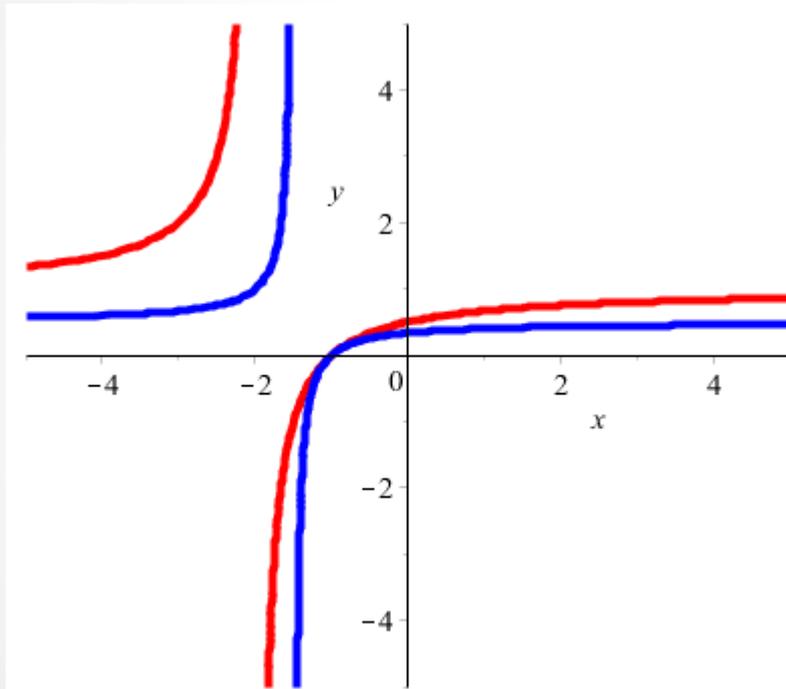
$$f_2 = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{11}xy$$



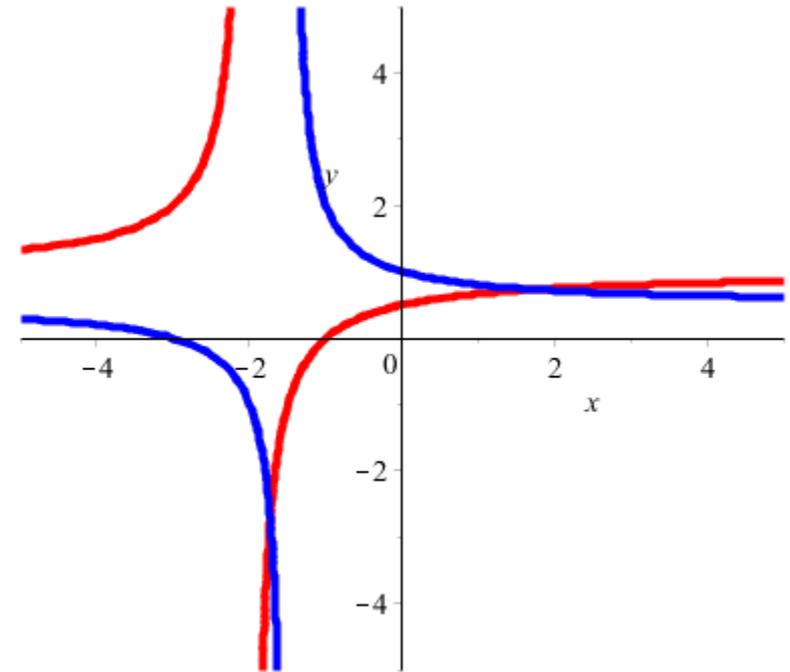
$D_{C,C}$ se conoce como el **hiperdeterminante** de formato $2 \times 2 \times 2$ y se **anula** cuando las curvas $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ son **tangentes**:

$$D_{C,C} = a_{00}^2 b_{11}^2 - 2a_{00}a_{01}b_{10}b_{11} - 2a_{00}a_{10}b_{01}b_{11} - 2a_{00}a_{11}b_{00}b_{11} + 4a_{00}a_{11}b_{01}b_{10} + a_{01}^2 b_{10}^2 + 4a_{01}a_{10}b_{00}b_{11} - 2a_{01}a_{10}b_{01}b_{10} - 2a_{01}a_{11}b_{00}b_{10} + a_{10}^2 b_{01}^2 - 2a_{10}a_{11}b_{00}b_{01} + a_{11}^2 b_{00}^2.$$

$D_{C,C}$ se anula en las hipérbolas de la derecha



$$\begin{aligned} 3 + x - 3 \cdot y - 2 \cdot x \cdot y &= 0 \\ 1 + x - 3 \cdot y - 2 \cdot x \cdot y &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3 + x - 3 \cdot y - 2 \cdot x \cdot y &= 0 \\ 1 + x - 2 \cdot y - x \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

ES DIFÍCIL ENCONTRAR POLINOMIOS CON MUCHAS RAÍCES REALES POSITIVAS

Miramos la familia de polinomios con dos parámetros a, b :

$$H_{(a,b)} := \begin{cases} h_1(x, y) := x^6 + a y^3 - y \\ h_2(x, y) := y^6 + b x^3 - x \end{cases}$$

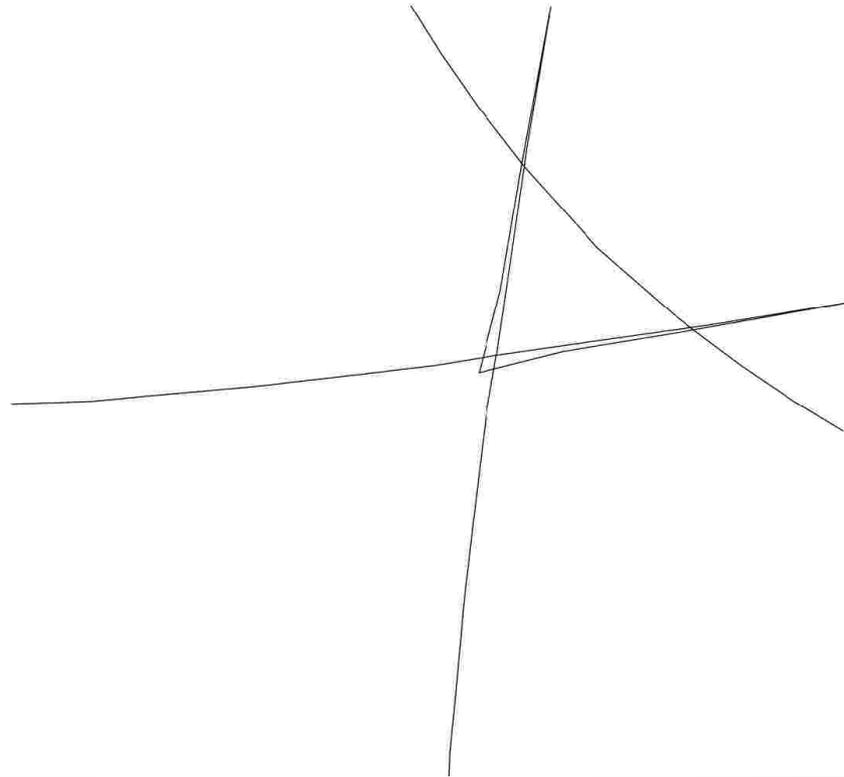
Para casi todos los valores de (a, b) , el sistema tiene o bien **1** o bien **3** soluciones reales.

Usando el **discriminante mixto** pudimos probar que hay **5** raíces reales positivas para $a = b = \frac{44}{31}$.

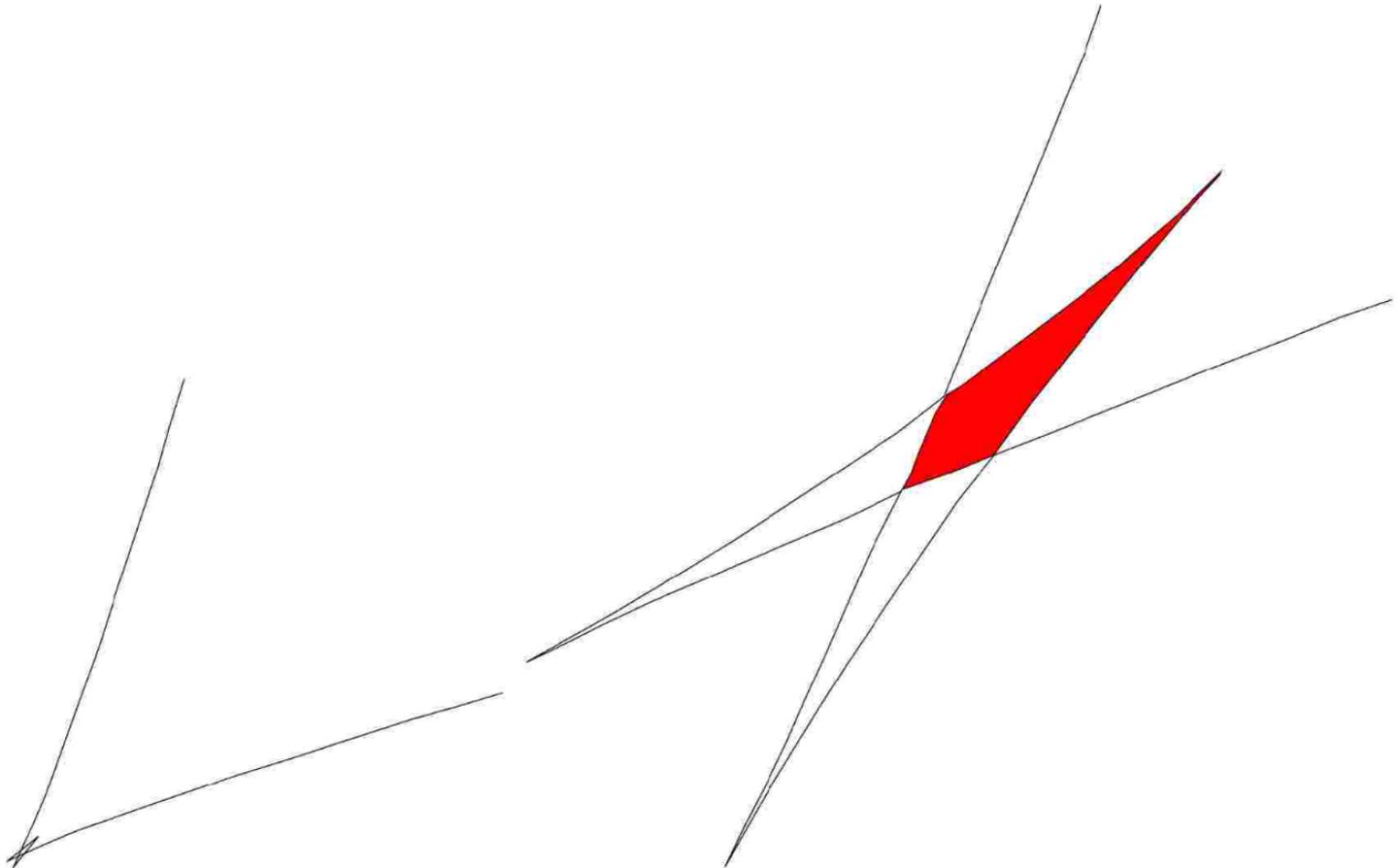
De hecho, el área del conjunto de puntos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que el sistema tiene **5** raíces reales positivas simples es **menor** que 5.701×10^{-7} .

DIBUJANDO $D_A = 0$

Más abajo hay una secuencia de 4 plots, dibujados en escala logarítmica y sucesivamente **magnificados** hasta un factor de alrededor de **1700**, de la variedad discriminantal ($D_A = 0$). El número de soluciones reales **no cambia** en cada **componente** de $D_A \neq 0$



MAGNIFICANDO



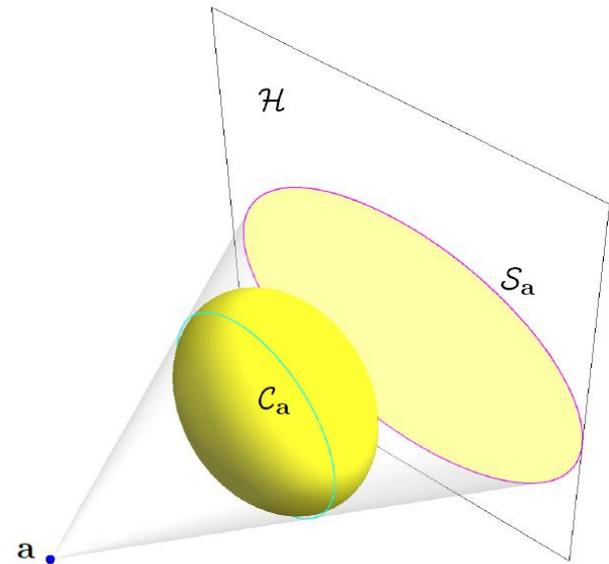
Por qué queremos calcular discriminantes?

Están relacionados con nuestra visión:

Vemos de un objeto el contorno correspondiente a los puntos donde las líneas desde nuestros ojos tocan al objeto de manera **tangente**.

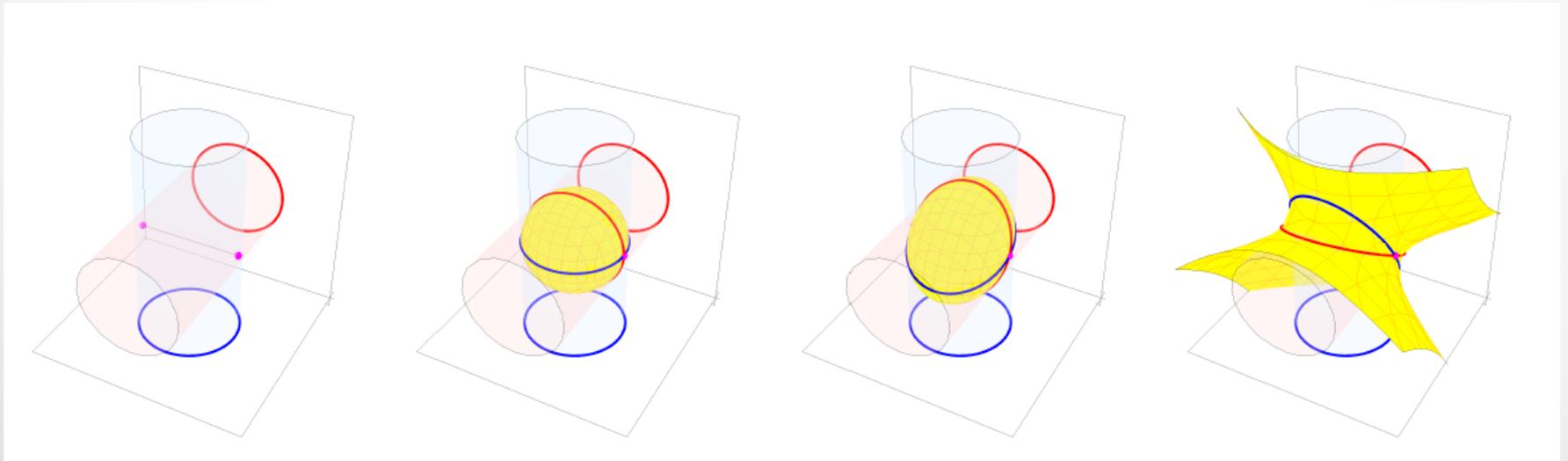
Este contorno se calcula con un **discriminante**.

[Esta imagen y la siguiente son de J. Vrsek]

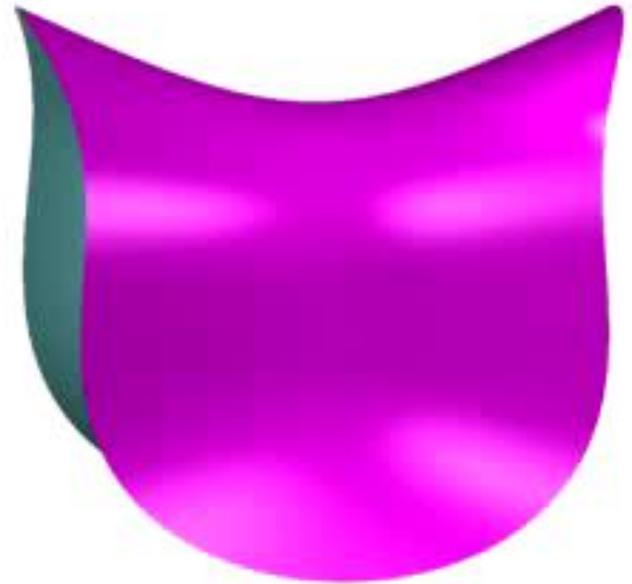
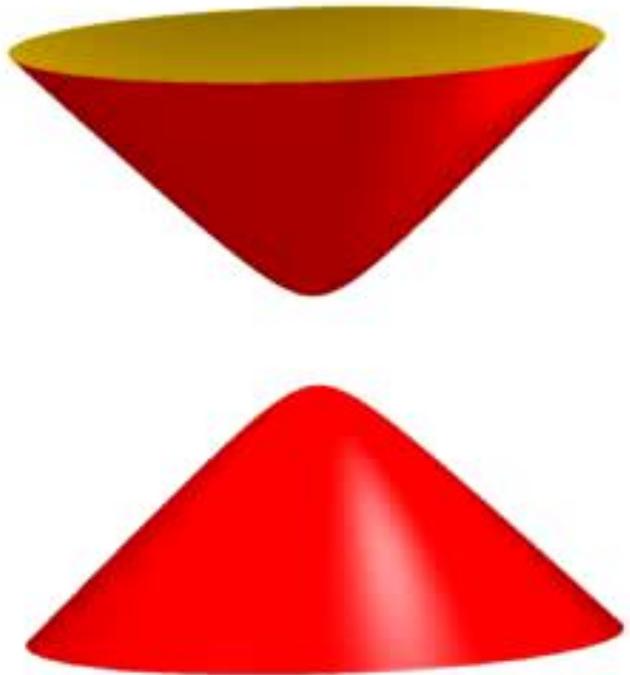


Reconstrucción de objetos

a partir de contornos **discriminantes en distintas direcciones**



En general, para predecir singularidades
(usamos **Surfer**, de imaginary.org)



Otras singularidades dibujadas con **Surfer**

The screenshot shows the Surfer software interface. The main window displays a 3D plot of a heart-shaped surface, colored in a gradient of pink and purple. The window title is "Surfer".

On the right side, there is a gallery of various surfaces categorized into:

- Simple Singularities: A blue and purple butterfly-like surface.
- World Record Surfaces: A golden, multi-lobed surface.
- Simple Surfaces: A purple and pink butterfly-like surface.
- Fancy Surfaces: A yellow and red surface.
- Fancy Surfaces II: An orange and blue surface.

At the bottom, there is a command line with the equation $(x^2+9/4*y^2+z^2-1)^3-x^2*z^3-9/80*y^2*z^3=0$. Below the command line is a toolbar with buttons for "a", "b", "x", "y", "z", "+", "-", "*", "^", ".", "(", ")", "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "Delete", and a "0=" button. To the right of the toolbar are buttons for "Coloring", "Gallery", "Info", and "Animate".

Movimientos de robots



Es importante evitar las **singularidades** en el movimiento del robot para que no se rompa... y las singularidades se detectan con el **discriminante** de las ecuaciones que definen las posibles trayectorias.

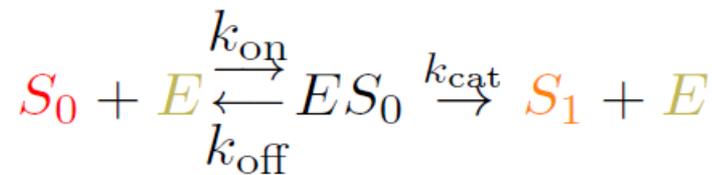
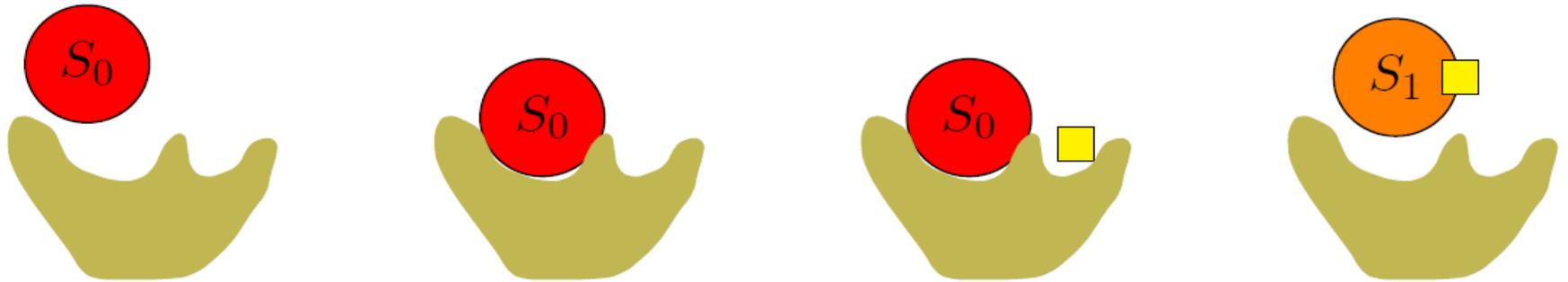
Singularidades de sistemas hipergeométricos

Las funciones **hipergeométricas** aparecen en varias aplicaciones físicas, desde temas clásicos como el movimiento de un **péndulo** hasta áreas modernas como la teoría de **mirror symmetry (simetría especular)** y como soluciones de ecuaciones diferenciales **“naturales”**

Las singularidades de las funciones **hipergeométricas** también están descritas por medio de **discriminantes**

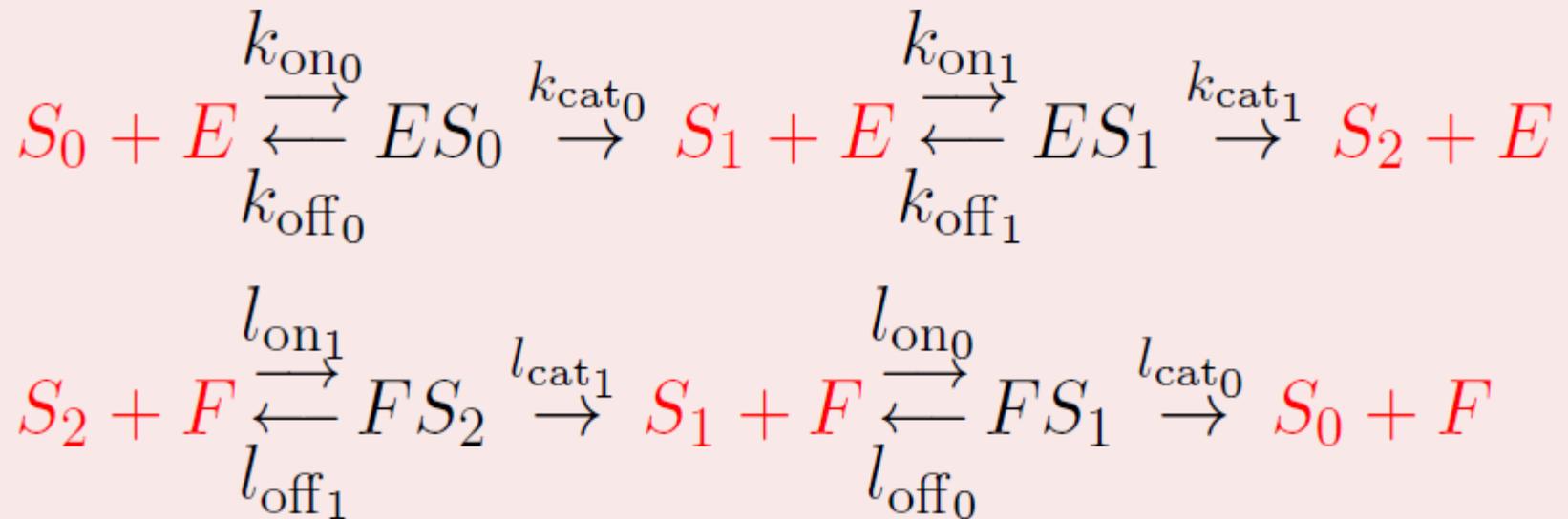
Una aplicación en biología de sistemas

Una enzima **E**, un sustrato **S₀**, un complejo intermedio **S₀E** y el sustrato fosforilado **S₁**



Dos fosforilaciones secuenciales

Una kinasa **E**, un sustrato **S₀**, el sustrato fosforilado **S₁**, el sustrato doblemente fosforilado **S₂**, una fosfatasa **F** y 4 complejos intermedios:



Dinámica de acción de masas $dx/dt=f(x)$

Quando las **concentrations** de las distintas especies químicas evolucionan en el tiempo con cinética de acción de masas, hay tres **cantidades conservadas (invariantes lineales de la dinámica)**: la cantidad total de **kinasa**, la cantidad total de **sustrato** y la cantidad total de **fosfatasa**.

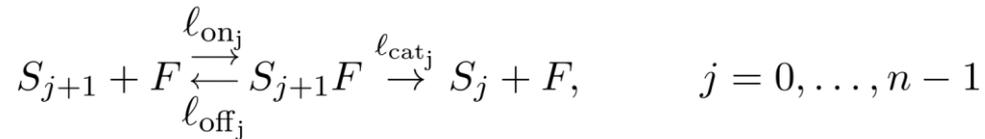
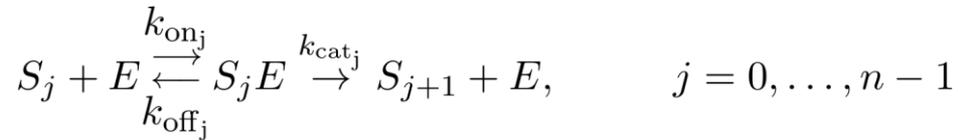
Este sistema secuencial de fosforilaciones tiene la **capacidad de multiestacionariedad**: existen **valores particulares de las constantes de reacción** para los cuales, **sin cambiar las cantidades totales conservadas**, dependiendo del estado inicial, el sistema puede evolucionar hacia **dos estados estacionarios diferentes**.

Decidiendo multiestacionariedad

La **multiestacionariedad** en redes bioquímicas es una propiedad importante porque se ve como una manera en que la célula puede “**tomar decisiones**”.

Discriminantes en el **espacio de las constantes de reacción** separan regiones de parámetros donde hay **monoestacionariedad** o **multiestacionariedad**.

Cuantificando, fuera del discriminante



Si

$$K_{\text{par}} = \max_{i \text{ par}} \left\{ \frac{k_{\text{cat}_i}}{\ell_{\text{cat}_i}} M_i \right\} < K_{\text{impar}} = \min_{i \text{ impar}} \left\{ \frac{k_{\text{cat}_i}}{\ell_{\text{cat}_i}} M_i \right\},$$

donde M_i son las constantes de Michaelis-Menten en la defosforilación y

$$S_{\text{tot}} > E_{\text{tot}},$$

entonces para todas las conservaciones totales que verifiquen la desigualdad

$$K_{\text{par}} < \left(\frac{S_{\text{tot}}}{E_{\text{tot}}} - 1 \right) F_{\text{tot}} < K_{\text{impar}},$$

hay $\mathbf{n} + 1$ (resp. n) estados estacionarios positivos si \mathbf{n} es par (resp. impar), luego de reescalar $k_{\text{on}_j}, \ell_{\text{on}_j}$.

Resumen

- Los discriminantes nos permiten predecir singularidades.
- Tienen una interesante estructura combinatoria y muchas aplicaciones.

- ¡Muchas gracias!

