Anales Acad. Nac. de Cs. Ex., Fís. y Nat., tomo 57 (2017): 61-64.

CAOS DETERMINISTA Y EXPANSIVIDAD

Jorge Lewowicz

Instituto de Matemática Estadística Prof. Rafael Laguardia (IMERL),
C. Correo 30, Montevideo, R.O. del Uruguay

Resumen

En este trabajo se estudian las propiedades básicas de la dinámica de los sistemas expansivos y su vínculo con los sistemas hiperbólicos Se destaca en el caso de los sistemas expansivos, la fuerte interacción entre la topología del espacio y el movimiento. Como consecuencia de esta interacción surge la posibilidad de clasificarlos bajo conjugación, cuando actúan en superficies compactas orientables. Se presentan algunos problemas abiertos, relativos a la conducta de aplicación tangente, para difeomorfismos expansivos.

Palabras clave: Sistemas dinámicos expansivos, Conjugación, Hiperbolicidad

Abstract

Deterministic chaos and expansivity. Basic properties of expansive dynamical systems are considered, together with their relationship with hyperbolicity. The interplay between the topology of the space where they take place, and their motion, is outlined. The classification (under topological equivalence) of expansive dynamic systems on compact surfaces is obtained as a consequence of the mentioned interplay. Also, some open problems concerning the behavior of the tangent map of differentiable expansive systems are stated.

Key words: Expansive dynamical systems, Conjugacy, Hyperbolicity

La Teoría de los Sistemas Dinámicos estudia el movimiento, básicamente, a través de las acciones del grupo de los reales R o de los enteros Z sobre un espacio métrico M. En el primer caso, para cada $t \in R$ se tiene un homeomorfismo φ_t de M sobre M; esta familia de homeomorfismos, que varían continuamente con t, cumple con las siguientes propiedades: i) $\varphi_0(x) = x$ para todo $x \in M$, y ii) $= \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ para todo $t, s \in R$. Para cada $x \in M$ queda determinada la trayectoria por $x : \varphi_t(x) : R \to M$. La motivación esencial para el estudio de estas acciones proviene de las ecuaciones diferenciales autónomas, y estas, a su vez, de la mecánica.

En el segundo caso, que es el que consideraremos en esta exposición, se estudia un homeomorfismo f de M sobre M y sus iterados f^n, $n \in Z$, que cumplen, claramente, las propiedades i) y ii) del párrafo anterior. Para cada $x \in M$ la trayectoria por x, $f^n(x)$, $n \in Z$ queda también determinada, pero en lugar de ser una curva continua, es discreta. En ambos casos (sistemas deterministas), la condición inicial x ($\varphi_0(x) = x = f^0(x)$) determina la trayectoria.

El problema fundamental de la Teoría de los Sistemas Dinámicos es la descripción de los conjuntos

$$\omega(x) = \{y : f^{n_k}(x) \to y, \text{ para alguna subsucesión } n_k \to \infty\}$$

y

$$\alpha(x) = \{y : f^{n_k}(x) \to y, \text{ para alguna subsucesión } n_k \to -\infty\}.$$

Estos conjuntos dan cuenta de, respectivamente, la "evolución final" y el "origen" de la trayectoria por x. Su conocimiento permite predecir, por ejemplo, la evolución, durante un largo período de tiempo, del móvil que partió de la condición inicial x. Y permiten también, eventualmente, actuar, modificando algo la transformación f, para obtener aproximadamente la evolución deseada. Sin embargo, muchos Sistemas Dinámicos son impredecibles: como la condición inicial x, sólo se conoce a menos de un cierto error, para poder predecir sería necesario que para condiciones iniciales y suficientemente cercanas a x, las evoluciones finales fueran próximas. Pero en estos sistemas (caóticos), la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales es tal que para y muy próximo a x las evoluciones finales $\omega(y)$ y $\omega(x)$ son muy distantes. Más todavia, si se conociera el presente x y el pasado $f^{-n}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ con una precisión mucho mayor que la que es dable actualmente, las evoluciones futuras posibles estarían muy alejadas, aun en términos de la precisión actual. Pero además, en estos sistemas, modificando algo la f, se observa, para la nueva transformación g, esencialmente la misma sensibilidad respecto de las condiciones iniciales.

Sistemas Expansivos

Sea M un espacio métrico y f un homeomorfismo de M sobre M. f es expansivo si existe $a \succ 0$ tal que si $x, y \in M$, $x \neq y$, entonces

$$\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \succ a,$$

para algun $n \in Z$. Esta condición es la que expresa más cabalmente la sensiblidad respecto de las condiciones iniciales: aunque x e y estén muy próximos, en algún momento se separan más que a. Si la precisión que hoy tenemos permite distinguir dos puntos a distancia a, reconoceremos, por su movimiento, todos los puntos del espacio. El hecho, entonces, de que todo punto del espacio tenga una dinámica distintiva, permite observar un diálogo más rico entre la topología y la dinámica. Cabe preguntarse ¿por qué no exigir $\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \succ a$, sólo para $n = 0$? El siguiente Teorema [U] responde: Teorema. Si M es compacto y $\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \succ a$, para $n = 0$, entonces M es finito.

Se podría preguntar también, si M es compacto e infinito y $f : M \to M$ es expansivo, ¿no habrá puntos sin sensibilidad a las condiciones iniciales en el futuro? En otras palabras: ¿no habrá puntos estables? (x es estable si para todo $\varepsilon \succ 0$, existe $\delta \succ 0$ tal que $\mathrm{dist}(x, y) \prec \delta$ implica $\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y) \prec e$ para $n \geq 0$). Por ejemplo en algunos sub-shifts de 2^Z que son expansivos sobre espacios compactos no numerables, hay puntos estables. Sin embargo, como expresión de la mencionada interacción entre la dinámica y la topología se prueba el siguiente Teorema [3]. Si M es una variedad compacta y $f : M \to M$ es expansivo, no hay puntos estables.

Ejemplos

Como la restricción de un sistema expansivo a cualquiera de sus subconjuntos invariantes es también expansivo, los ejemplos que siguen son, a su vez, fuente de otros ejemplos

1) Sea K un conjunto finito; el "shift": $K^Z \to K^Z$, $s(\{x_n\}) = \{y_n\}$, $y_n = x_{n-1}$ es expansivo.

2) Sea f un difeomorfismo de la variedad diferenciable compacta y riemanniana M . f es de Anosov si existen $L \succ 0$, $0 \prec \lambda \prec 1$ y sub-fibrados continuos S, U de TM, $S \oplus U = TM$, invariantes bajo f y tales que

$$||Df^n(s)|| \leq L\lambda^n ||s||, \ s \in S, \ n \geq 0,$$

$$||Df^n(u)|| = L\lambda^{-n}||u||, \ u \in U, \ n \geq 0.$$

3) Sea f un homeomorfismo de una superficie compacta orientable de género mayor que 1. f es pseudo-Anosov si existen dos foliaciones con singularidades S y U de M, transversales y f-invariantes, y, además, medidas transversales (sobre el espacio de hojas estables o inestables) μ_S, μ_U y $\lambda \succ 1$ tales que $f^*\mu_U = \lambda\mu_U$ y $f^*\mu_S = \lambda^{-1}\mu_S$. La existencia y expansividad de estos homeomorfismos fue probada en [8].

Dinámica de los ejemplos

En 1), en 2) cuando la dimensión de la variedad M = 2,3 y en 3) se tiene que hay un conjunto residual de trayectorias densas en el espacio donde transcurre la dinámica, un conjunto denso de puntos periódicos y un conjunto denso de puntos cuyas trayectorias no son densas ni periódicas. En 2), si la dimensión de $M \leq 3$, se satisfacen las mismas propiedades sobre el conjunto no errante Ω. ($x \in \Omega$ si para todo entorno E de x, $f^n(E) \cap E \neq \emptyset$, para algún $n \neq 0$). El conjunto Ω, que es cerrado e invariante, es todo el espacio en 1), 3) y en 2) si dim M = 2, 3.

Todos los ejemplos son topológicamente "mixing" en Ω: dados dos abiertos A y A^0 en Ω, existe $N \succ 0$, tal que $f^n(A) \cap A^0 \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.

Estabilidad

i) El homeomorfismo $f: M \to M$ se dice persistente si para todo $\varepsilon \succ 0$ existe N, C^0-entorno de f tal que si $g \in N$, y x M, existe $y \in M$ con la propiedad $\mathrm{dist}(f^n(x), g^n(y)) < \varepsilon$, $n \in Z$. Es decir, un observador que no distinga puntos a distancia menor que ε ve en g. toda trayectoria de f.

ii) Si f es expansivo y N puede escogerse tan pequeño que además de i) cumpla con: para todo $y \in M$, existe $x \in M$ tal que $\mathrm{dist}(f^n(x), g^n(y)) \prec \varepsilon$, $n \in Z$, decimos que f es topológicamente estable. En estas condiciones es fácil verificar que si $\varepsilon \prec a/2$, para todo y existe un único x con la propiedad mencionada, y que la función h de M sobre M que a cada y asocia este x, es continua, sobreyectiva y $f \circ h = h \circ g$; se le llama semi conjugación.

iii) Si f es un difeomorfismo de la variedad compacta diferenciable M sobre M y para todo $\varepsilon \succ 0$ existe N, C'-entorno de f, tal que para todo $g \in N$, la h mencionada en ii) resulte un homeomorfismo (conjugación), decimos que f es estructuralmente estable.

Los homeomorfismos de 3) del párrafo anterior son persistentes, cumplen i) [1,3], pero no satisfacen las propiedades de ii) ni de iii) aun si fueran infinitamente diferenciables. En cambio los de 3) son topológica y estructuralmente estables. El homeomorfismo expansivo de $T2 \to T^2$:

$(x, y) \to (2x + y\text{-}1/2\pi \ \mathrm{sen}2\,\pi x,\ x + y\text{-}1/2\pi \ \mathrm{sen}2\,\pi x)$ cumple i) y ii) pero no iii).

Clasificación

Este tema incluye dos problemas: a) ¿qué variedades compactas soportan homeomorfismos expansivos? y b) ¿como son las clases de equivalencia (bajo conjugación) de estos homeomorfismos? Hasta hace poco no se conocía la respuesta a estas preguntas ni siquiera en el caso de superficies (no existen homeomorfismos de S^1); no se sabía, por ejemplo, si en la esfera S^2 hay homeomorfismos expansivos. Los teoremas de clasificación sobre superficies [2,4], se refieren a superficies orientables y aseguran, respecto de a) que en S^2 no hay homeomorfismos expansivos; con relación a b) prueban que en el toro T^2 son conjugados a los de Anosov y que para superficies de género mayor que 1 son conjugados a los pseudo-Anosov. Algo más precisamente, dos expansivos son conjugados si y sólo si son homotópicos. En el caso de T^2 hay un representante de cada clase de conjugación, que es un isomorfismo del grupo topológico T^2.

En dimensión 3) se demuestra, en el caso en que f es un difeomorfismo expansivo sobre la variedad compacta M, con $\Omega(f) = M$, que $M = T^3$, y f es conjugado al isomorfismo de T^3 homotópico a f [9].

Para dimensiones más altas, M. Paternain [7] anunció un resultado que asegura que las variedades compactas simplemente conexas no soportan homeomorfismos expansivos.

Difeomorfismos expansivos y su aplicación tangente

Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de la variedad compacta riemanniana M, tal que su aplicación tangente

$Tf : TM \to TM$ sea expansiva, es decir tal que $\|Tf^n u\| \succ \|u\|$, para algún $n \in Z$ y todo $u \in TM$, $u \neq 0$. Estos difeomorfismos introducidos por R. Mané [6] llamados Quasi-Anosov, son expansivos; en el caso en que $\Omega = M$ son Anosov. La única superficie que soporta un f Quasi-Anosov es T^2, y en este caso f es de Anosov. El mismo Mané probó que el C^1-interior del subespacio de los difeomorfismos expansivos es el de los Quasi-Anosov, pero no se sabe, si la C^1-adherencia (clausura) de los Quasi-Anosov contiene el subconjunto de los expansivos. En particular, no se sabe si un difeomorfismo expansivo, C^∞ o analítico de T^2 es C^1-límite de difeomorfismos de Anosov. Vale la pena recalcar, que en virtud de los Teoremas de Clasificación, este difeomorfismo es conjugado a un Anosov lineal (tiene la misma dinámica) y además es C^0-límite de los Anosov. Este es un problema abierto básico, vinculado con preguntas como: dado que un Anosov tiene en cada punto de T^2 un vector tangente cuyos iterados por la aplicación tangente resultan acotados en el futuro, ¿es cierto que para un difeomorfismo analítico conjugado a ese Anosov, vale la misma propiedad?

Otro problema básico abierto, también conectado con la interacción de la dinámica y la diferenciabilidad es el siguiente: Dado que en un Anosov f de T^2, que preserva la medida usual, en todo punto hay un vector tangente u tal que

$$\lim\sup 1/n \log \|Tf^n(u)\| \succ 0$$

¿es cierto que para un difeomorfismo analítico que preserva la misma medida y es conjugado a él, la propiedad mencionada más arriba se cumple en un conjunto de medida positiva? El ejemplo del último párrafo de la sección Estabilidad, que es conjugado al Anosov lineal:

$$(x, y) \to (2x + y,\ x + y)$$

satisface las condiciones mencionadas en un conjunto de medida total, pero no en todos los puntos; en (0, 0) no hay ningun vector tangente que cumpla con la propiedad señalada del límite superior (los valores propios de la aplicación tangente en ese punto son 1).

Coexistencia

Consideremos los difeomorfismos de T^2:

$$(x, y) \to (2x + y - (1+c)1/2\pi \operatorname{sen} 2\pi x,$$
$$x + y - (1+c)1/2\pi \operatorname{sen} 2\pi x)$$

Todos preservan la medida usual en T^2; cuando $c < 0$, son de Anosov y si $c = 0$ no es de Anosov, como señalamos antes, pero es conjugado a uno de Anosov y topológicamente estable. En el caso $c > 0$, el origen pasa a ser un punto elíptico (los valores propios de su parte lineal son complejos de módulo 1). Esta familia es muy estudiada actualmente [5], en parte porque se presenta como una de las formas más simples de pasar de lo hiperbólico a lo elíptico. Por otra parte, por su vínculo con la "standard map" en T^2; de diversas aplicaciones en Física. Para $c > 0$, el origen es genéricamente estable; hay un entorno del origen que se transforma en sí mismo. El problema en este caso es saber si el sistema mantiene cierta hiperbolicidad; es decir, si existe un subconjunto A de T^2 , de medida positiva donde se cumpla.

$$\limsup 1/n \log \| Tf^n(u) \| \succ 0$$

para algún $u \in Tx(T^2)$ y todo $x \in A$.

Referencias

[1] M. Handel, Ergodic Theory and Dynamical Systems 5 (1995) 373.

[2] K. Hiraide, Osaka J. Math. 27 (1990) 117.

[3] J. Lewowicz, Ergodic Theory and Dynamical Systems 3 (1983) (1983) 567.

[4] J. Lewowicz, Bol. Soc. Bras. Math. (New Series) 20 (1989) 113.

[5] C. Liverani, Math. Phys. Electr. J. 10 (2004).

[6] R. Mané, Springer Lecture Notes in Math. 468 (1975).

[7] M. Paternain, Compt. Rend. Acad. Sc. (Math.) 329 (1999) 1081.

[8] W. Thurston, Bull. Am. Math. Soc. 19 (1988) 417.

[9] W. Utz, Proc. Am. Math. Soc. 1 (1950).

Trabajo recibido y aceptao en julio de 2007