Anales Acad. Nac. de Cs. Ex., Fís. y Nat., tomo 52 (2000): 9-23.

VERDAD Y CONSECUENCIA EN EL SEGMENTO UNITARIO REAL: UNA FORMALIZACIÓN DE LA LÓGICA BORROSA

Roberto L. O. Cignoli

UBA y CONICET. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Ciudad Universitaria. (1428) Buenos Aires, Argentina.

Resumen

Se presenta un panorama, no demasiado técnico, de una reciente formalización de la lógica borrosa basada en las t-normas continuas y de las estructuras algebraicas asociadas.

Palabras clave: lógica borrosa, lógicas polivalentes, t-normas, BL-álgebras, sistemas formales.

Abstract

This is an overview, avoiding technicalities, of a recent formalization of fuzzy logic based on continuous t-norms and of the associated algebraic structures.

Key words: fuzzy logic, many-valued logics, t-norms, BL-algebras, formal systems.

La *lógica borrosa,* también conocida como *lógica difusa* (fuzzy logic en inglés), tiene su origen en un trabajo de L. A. Zadeh publicado en 1965 [44] y desde entonces se ha desarrollado vertiginosamente, habiendo sido aplicada con éxito en problemas de control, diagnóstico, cálculo de estructuras, etc. Incluso es ahora común encontrar electrodomésticos regulados por lógica borrosa.

A pesar de este desarrollo, la lógica borrosa aparece más como un conjunto de recetas empíricas que como una teoría formalizada. Su formalización matemática es importante tanto del punto de vista conceptual como del de su potencial para aplicaciones más sofisticadas. Un notable intento de formalizar ciertos sistemas de lógica borrosa es el reciente libro de P. Hájek [25], que utiliza la bien desarrollada teoría de las lógicas multivaluadas.

Nos proponemos describir brevemente la formalización de Hájek y nuestras contribuciones a la misma, basadas en nuestra experiencia previa en el tratamiento algebraico de lógicas multivaluadas (ver, por ejemplo, [5, 17, 18]).

Conferencia pronunciada en su incorporación como Académico Titular, el 30 de abril de 1999.

La idea básica es obtener un cálculo proposicional preciso partiendo de enunciados imprecisos.

En el tratamiento clásico de la lógica, las proposiciones son enunciados que pueden ser verdaderos o falsos. Esta "bivalencia" de la lógica clásica se funda en los principios de *contradicción* (un enunciado no puede ser a la vez verdadero y falso) y del *tercero excluido* (todo enunciado o es verdadero o es falso). Estos principios fueron formulados por Aristóteles, quien les dio un carácter ontológico: nada puede ser y no ser al mismo tiempo; algo es o no es.

Este carácter ontológico de los principios básicos hace que la lógica clásica no sea la más adecuada para tratar ciertos enunciados del lenguaje corriente, que por su naturaleza son imprecisos o vagos, como por ejemplo "Juan es alto". Seguramente consideraremos este enunciado verdadero si Juan mide 1,86 m, y falso si Juan mide 1,55 m. Pero ¿qué valor de verdad le asignaremos si Juan mide, por ejemplo, 1,70 m?

Tradicionalmente, en lógica simbólica la verdad se representa por el número 1 y la falsedad por el 0. La idea de Zadeh es que a los enunciados imprecisos se les pueda asignar como valor de verdad cualquier número real entre 0 y 1. Conviene observar que ya en los comienzos de la década del 20, el lógico polaco J. Łukasiewicz había establecido un sistema de lógica coherente en el que a los enunciados se le asignan como valores de verdad números reales entre 0 y 1.

Para ilustrar estas ideas, representemos con P_n el enunciado "n es un número grande". Uno podría decir que $P_{1.000.000}$ es verdadero y que P_2 es falso. Pero ¿cuál es el límite? Veamos.

El enunciado condicional "si n es un número grande, también lo es $n - 1$", que simbolizaremos $P_n \Rightarrow P_{n-1}$, parece ser verdadero.

Una conocida regla de inferencia, la regla del *modus ponens,* afirma que si P y Q representan enunciados tales que los enunciados P y el condicional "Si P entonces Q" son ambos verdaderos, también debe ser verdadero el enunciado Q.

Por lo tanto, de la verdad de $P_{1.000.000}$ y de $P_{1.000.000} \Rightarrow P_{999.999}$ se concluye la verdad de $P_{999.999}$, esto es que 999.999 es un número grande. Ahora de la verdad de $P_{999.999}$ y $P_{999.999} \Rightarrow P_{999.998}$ también se concluye la verdad de $P_{999.998}$. Continuando de esta manera se concluye que P_3, P_2, P_1 deben ser verdaderos, esto es, que también 3, 2, 1 son números grandes.

En otras palabras, vimos que si n es un número grande, entonces todos los números menores también deben ser grandes. (Paradoja *sorites*).

La paradoja resulta de considerar como una regla válida de razonamiento el modus ponens y de suponer que el enunciado "Si le quitamos una unidad a un número grande, entonces el número que resulta sigue siendo grande" es siempre verdadero. En realidad este es un enunciado impreciso, debido a la imprecisión del término "grande", y es sólo parcialmente verdadero: será "más verdadero" cuanto "mayor" sea el número que disminuimos en uno. Veremos que el admitir más valores de verdad que los tradicionales "verdadero" y "falso" nos permite construir sistemas formales donde la regla del modus ponens continúa valiendo pero no se infieren resultados paradojales del tipo anterior.

Antes de proseguir, conviene decir algunas generalidades sobre sistemas formales.

En los sistemas formales las proposiciones se representan por *fórmulas proposicionales,* que son expresiones que se obtienen combinando *variables proposicionales* X_1, X_2,..., X_n,... por medio de los conectivos lógicos & (conjunción), $\Rightarrow$ (implicación) y ~ (negación) y los paréntesis. Por ejemplo $(X_1 \Rightarrow X_2)$ & $\sim X_1$, $\sim X_1 \Rightarrow (\sim X_7 \& X_3)$ son fórmulas proposicionales.

En un sistema formal de lógica proposicional $\mathcal{F}$ hay que distinguir entre la semántica y la sintaxis.

La semántica consiste en un método para asignar valores de verdad a las proposiciones representadas en el sistema. A partir de esta noción de verdad, se define el concepto semántico de *consecuencia: Una proposición P es una consecuencia de un* *conjunto $\mathcal{H}$ de proposiciones,* en símbolos $\mathcal{H} \models_{\mathcal{F}} P$, si y sólo si toda asignación de valores de verdad en $\mathcal{F}$ que haga verdaderas a todas las proposiciones de $\mathcal{H}$ también hace verdadera a P. Las consecuencias del conjunto vacío, esto es, las proposiciones que para cualquier asignación de valores de verdad en $\mathcal{F}$ resultan verdaderas, son llamadas *tautologías de $\mathcal{F}$.*

La sintaxis está ligada a la idea de *demostración.* En los sistemas formales de tipo Hilbert, se elige un conjunto de formas proposicionales, que se denominan *axiomas* y ciertas *reglas de inferencia.* Para fijar ideas, consideraremos como única regla de inferencia el modus ponens. Una *demostración a partir de un conjunto de proposiciones $\mathcal{H}$* (la hipótesis) consiste en una lista finita de proposiciones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tal que para todo i con $1 \leq i \leq n$, se tiene que o bien Q_i es de la forma de uno de los axiomas, o bien $Q_i \in \mathcal{H}$, o bien existen índices j, k tales que $1 \leq j$, $k < i$ de modo que Q_i se infiere por modus ponens de Q_j y Q_k. Una proposición P se dice *demostrable a partir de un conjunto de proposiciones $\mathcal{H}$,* y escribiremos $\mathcal{H} \vdash_{\mathcal{F}} P$, si existe una demostración $Q_1, \ldots, Q_r$ a partir de $\mathcal{H}$ tal que $Q_r = P$. Una proposición P se dice *demostrable en $\mathcal{F}$* si y sólo si $\emptyset \vdash_{\mathcal{F}} P$, esto es, si y sólo si es demostrable a partir de los axiomas, sin hipótesis adicionales.

Naturalmente, interesan las conexiones entre la semántica y la sintaxis de un sistema formal.

El sistema $\mathcal{F}$ se dice *correcto o adecuado* si y sólo si para todo conjunto $\mathcal{H}$ de proposiciones de $\mathcal{F}$ y toda proposición P en $\mathcal{F}$, $\mathcal{H} \vdash_{\mathcal{F}} P$ implica que $\mathcal{H} \models_{\mathcal{F}} P$. En otras palabras, *$\mathcal{F}$ es correcto si a partir de hipótesis verdaderas se demuestran proposiciones verdaderas.* Es fácil convencerse de que para garantizar la corrección, basta pedir que los axiomas sean tautologías y que las reglas de inferencia preserven la noción de verdad en $\mathcal{F}$. En el caso del modus ponens, esto último significa que el método de asignación de valores de verdad en $\mathcal{F}$ debe ser tal que siempre que las premisas P y $P \Rightarrow Q$ resulten verdaderas, también debe ser verdadera la conclusión Q.

El sistema $\mathcal{F}$ se dice *completo* si y sólo si para toda proposición P, $\emptyset \models_{\mathcal{F}} P$ implica que $\emptyset \vdash_{\mathcal{F}} P$. Esto es, *$\mathcal{F}$ es completo si y sólo si todas las tautologías son demostrables.*

En la literatura también se consideran sistemas *fuertemente completos,* en los que todas las consecuencias de un conjunto de proposiciones $\mathcal{H}$ son demostrables a partir de $\mathcal{H}$. Como los sistemas que consideraremos no son fuertemente completos, no insistiremos con esta noción (ver [18, §4.6]).

En su tratado [25], Hájek propone una formalización de los sistemas de lógica borrosa en los que los valores de verdad de las proposiciones se asignan mediante t-normas continuas. Estos sistemas contienen como casos particulares a las lógicas multivaluadas de Łukasiewicz, a la parte lineal del cálculo proposicional intuicionista y, naturalmente, también al cálculo proposicional clásico.

En lo que sigue resumiremos algunas propiedades de estos sistemas formales, especialmente en lo que se refiere a la completitud. Comenzaremos por definir las t-normas continuas.

1. t-normas continuas

Una *t-norma* es una operación binaria $*$ definida sobre el segmento unitario real $[0, 1]$ con las siguientes propiedades:

N_1 Asociativa: $x * (y * z) = (x * y) * z$.

N_2 Conmutativa: $x * y = y * x$.

N_3 Preservación del orden en ambas variables:

$$x_1 \leq x_2 \text{ implica } x_1 * y \leq x_2 * y,$$
$$y_1 \leq y_2 \text{ implica } x * y_1 \leq x * y_2.$$

N_4 Elemento neutro: $x * 1 = x$.

N_5 Elemento absorbente: $x * 0 = 0$.

Consideraremos únicamente t-normas *continuas.*

Con cada t-norma continua $*$ podemos asociar otra operación binaria, $\rightarrow$, definida sobre el segmento $[0, 1]$ del siguiente modo:

$$x \to y := \max \{z \in [0, 1] \mid z * x \leq y\}.$$

Esta operación $\to$ se conoce como *el residuo* o *la operación adjunta* de $*$.

La relación básica entre una t-norma y su adjunta es la siguiente:

$$z * x \leq y \quad \text{si y sólo si} \quad z \leq x \to y. \quad (1)$$

También definimos una operación unaria $\neg$ por la fórmula:

$$\neg x := x \to 0. \quad (2)$$

Los siguientes son ejemplos de t-normas continuas y sus respectivos adjuntos:

Ejemplo 1

$$x *_H y = x \wedge y = \min (x, y)$$

$$x \to_H y = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ y & si\ x > y \end{cases}$$

$$\neg_H x = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

$$x *_P y = xy \ (producto\ ordinario)$$

$$x \to_P y = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ y/x & si\ x > y \end{cases}$$

$$\neg_P x = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

$$x *_L y = \max(x + y - 1,0)$$

$$x \to_L y = \min(1,1 - x + y)$$

$$\neg_L x = 1 - x$$

El primer ejemplo es un caso particular de lógica intucionista formalizada por Heyting. El tercero corresponde a la lógica infinito-valente de Łukasiewicz. Estos tres ejemplos son básicos, pues en cierto sentido generan todas las posibles t-normas continuas:

Sea $*$ una t-norma continua. Un elemento $x \in [0, 1]$ es *idempotente* si $x^2 = x * x = x$, y es *nilpotente* si existe un número natural n tal que $x^n = 0$.

La continuidad de $*$ implica que el conjunto I de todos los elementos idempotentes es cerrado. Luego:

$$[0,1] \setminus I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda),$$

donde $0 \leq a_\lambda \leq b_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $\# \Lambda \leq \aleph_0$.

La restricción de $*$ a cada uno de los intervalos *cerrados* $[a_\lambda, b_\lambda]$ coincide o bien con $*_P$ o bien con $*_L$. La restricción a I coincide con $*_H$ (ver [25]).

Observación 1.1. Menu y Pavelka [33] probaron que $*_L$ es la única t-norma con la propiedad que ella y su adjunta son ambas continuas como funciones de $[0, 1] \times [0, 1]$ en $[0, 1]$.

No es difícil verificar las siguientes propiedades de las t-normas continuas y sus respectivos adjuntos:

$$x \leq y \quad \text{si y sólo si} \quad x \to y = 1. \quad (3)$$

$$x \wedge y = \min (x, y) = x * (x \to y). \quad (4)$$

$$x \vee y = \max(x, y) = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x). \quad (5)$$

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1. \quad (6)$$

Con cada t-norma continua $*$ podemos asociar un sistema formal $\mathcal{F}(*)$. La semántica para estos cálculos puede ser definida en general. La sintaxis depende de cada t-norma, y será considerada posteriormente.

A las proposiciones se les asignan valores de verdad en el segmento $[0, 1]$, considerando que el 1 representa la verdad absoluta y el 0 la falsedad absoluta e interpretando la conjunción & por $*$, la implicación $\Rightarrow$ por el residuo $\to$ y la negación ~ por la operación $\neg$.

Esto es, si a las proposiciones P y Q les asignamos como valores de verdad los números reales $v(P)$ y $v(Q)$, respectivamente, tendremos que los valores de verdad de las proposiciones compuestas $P\&Q$, $P \Rightarrow Q$ y $\sim P$ están definidos del modo siguiente:

$$v(P \,\&\, Q) = v(P) * v(Q),$$

$$v(P \Rightarrow Q) = v(P) \to v(Q),$$

$$v(\sim P) = \neg v(P).$$

Resulta de estas definiciones que *si una proposición P está representada por una fórmula proposicional que es combinación de variables proposicionales $X_1, X_2,\ldots, X_r$ por medio de los conectivos lógicos de conjunción, implicación y negación, entonces el valor de verdad $v(P)$ está determinado por los valores de verdad $v(X_1), v(X_2),\ldots, v(X_r)$.*

Si se tiene que $v(P) = 1$ para todos los posibles valores $v(X_1), v(X_2),\ldots, v(X_r)$, entonces P es una tautología de $\mathcal{F}(*)$. Denotaremos con $Taut_*$ al conjunto de todas las tautologías de $\mathcal{F}(*)$.

Por ejemplo,

$$P = X_1 \Rightarrow \sim\sim X_1 \in Taut_*$$

cuando $*$ es una cualquiera de las tres t-normas básicas

Pero

$$P = \sim\sim X_1 \Rightarrow X_1$$

es una tautología para $*_L$, que no lo es ni para $*_H$ ni para $*_P$.

En general, se tiene que $\mathcal{H} \models_* P$, si siempre que $v(Q) = 1$ para toda proposición Q en $\mathcal{H}$, entonces también $v(P) = 1$.

Es fácil verificar que la regla del modus ponens preserva la verdad en todos los sistemas $\mathcal{F}(*)$.

Para ilustrar estas ideas, volvamos al ejemplo en que P_n representa el enunciado "n es un número grande". Parece razonable considerar que

$$v(P_n) \leq v(P_{n+1}).$$

Pongamos, para todo n,

$$v\left(P_n \Rightarrow P_{n-1}\right) = \frac{n-1}{n}$$

y supongamos que $* = *_P$, el producto ordinario.

Si $P_{1.000.000}$ es verdadero, esto es, $v(P_{1.000.000}) = 1$, teniendo en cuenta (4) tendremos que:

$$v(P_{999.999}) = \min(v(P_{1.000.000}), v(P_{999.999})) =$$

$$v(P_{1.000.000}) * v(P_{1.000.000} \Rightarrow P_{999.999}) = \frac{999.999}{1000.000}$$

en general, tendremos que

$$v\left(P_{n-k}\right) = \frac{n-k}{n}$$

Luego

$$v(P_1) = \frac{1}{n}, \ v(P_0) = 0.$$

resultados que están acordes con la intuición.

2. La lógica borrosa básica de Hájek

La lógica borrosa básica fue introducida por Hájek [25] con la intención de obtener un sistema formal que capture la noción de verdad y consecuencia relativas a todas las t-normas continuas.

Esto es, si indicamos con $\models_b$ la relación de consecuencia en esta lógica, se tiene que, para todo conjunto $\mathcal{H}$ de proposiciones y toda proposición P:

$$\mathcal{H} \models_b P \text{ si y sólo si } \mathcal{H} \models_* P$$
$$\text{para toda t-norma continua } *.$$

En particular, las tautologías de esta lógica son aquellas proposiciones que son tautologías para todas las t-normas continuas. Esto es, si $Taut_b$ denota el conjunto de las tautologías de la lógica básica, entonces:

$$Taut_b = \bigcap\{Taut_* : * \text{ es t-norma continua}\}.$$

Hájek [25] definió la sintaxis de la lógica borrosa básica tomando como axiomas las proposiciones que se pueden escribir en una de las siguientes formas:

T_1 $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
T_2 $(P\&Q) \Rightarrow P$
T_3 $(P\&Q \Rightarrow (Q\&P)$
T_4 $(P\&(P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (Q\&(Q \Rightarrow P))$
T_{5a} $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P\&Q) \Rightarrow R)$
T_{5b} $((P\&Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$
T_6 $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (((Q \Rightarrow P) \Rightarrow R) \Rightarrow R)$
T_7 $\sim (Q \Rightarrow Q) \Rightarrow P$

y como regla de deducción el modus ponens.

Es fácil verificar que las proposiciones de la forma de alguno de los axiomas están en $Taut_b$ y que la regla del modus ponens preserva la verdad. Por lo tanto la sintaxis de la lógica borrosa básica es adecuada a la semántica. Su completitud fue conjeturada por Hájek, y demostrada en [21]. Para indicar la demostración, necesitaremos la teoría de las BL-álgebras, que consideraremos en la próxima sección.

3. BL-álgebras

Motivado por las propiedades (3) - (6) de las t-normas continuas, Hájek introdujo la siguiente clase de álgebras, que juegan para la lógica básica un papel análogo al de las álgebras de Boole para la lógica clásica (ver [25]).

Definición 3.1. Una *BL-álgebra* es un sistema $\langle A, *, \rightarrow, \perp\rangle$ donde A es un conjunto no vacío, $*$ y $\rightarrow$ son operaciones binarias sobre A, $\perp$ es un elemento fijo de A, y que, con el elemento $\top$ definido por:

$$\top := \perp \rightarrow \perp,$$

y con las operaciones $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ definidas por:

$$\neg x := x \rightarrow \perp,$$

$$x \wedge y := x * (x \rightarrow y),$$

$$x \vee y := ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x),$$

satisface los siguiente axiomas:

A_1 $\langle A, *, \top\rangle$ es un monoide abeliano (esto es, $*$ es asociativa, conmutativa y $x * \top = x$),

A_2 $\mathbf{L}(A) := \langle A, \vee, \wedge, \perp, \top\rangle$ es un retículo con elemento mínimo $\perp$ y elemento máximo $\top$ (esto es, las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son ambas conmutativas y asociativas; $x \vee x = x = x \wedge x$, $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$, $x \wedge \perp = \perp$, $x \wedge \top = x$),

A_3 $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$, $x * (y \wedge z) = (x * y) \wedge (x * z)$,

A_4 $(x * y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$,

A_5 $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = \top$,

A_6 $x \rightarrow x = \top$.

Es claro que el segmento unitario real [0, 1] equipado con una t-norma continua $*$ y su adjunta $\rightarrow$, y con $\perp = 0$, es un ejemplo de BL-álgebra.

Sea A una BL-álgebra. Denotaremos con $\leq$ el orden (parcial) definido por A por la estructura de retículo dada por (A_2), esto es,

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x = x \wedge y \text{ si y sólo si } y = x \vee y.$$

Este orden se llama el *orden natural* de la BL-álgebra A.

Cuando el orden natural de la BL-álgebra A es total (o sea, para todo x, y en A, $x \leq y$ ó $y \leq x$), decimos que A es una *BL-cadena.*

Una ecuación en el lenguaje $\langle *, \rightarrow, \perp\rangle$ es una expresión de la forma

$$\varphi(X_1,..X_n) \approx \psi(X_1,..X_n)$$

donde φ, ψ son fórmulas proposicionales obtenidas a partir de las variables proposicionales $X_1,..X_n$.

Una BL-álgebra A *satisface* la ecuación $\varphi(X_1,...X_n) = \psi(X_1,..X_n)$ si y sólo si para toda n-upla $(a_1,...,a_n)$ de elementos de A se tiene que

$$\varphi(a_1,..a_n) = \psi(a_1,...a_n).$$

La importancia de las BL-cadenas está dado por el siguiente resultado, debido a Hájek [25].

Teorema 3.2. *Una ecuación $\varphi(X_1,..X_n) \approx \psi(X_1,..X_n)$ es satisfecha por toda BL-álgebra si y sólo si es satisfecha por todas las BL-cadenas.*

Veamos el significado de este resultado para la lógica básica.

Denotaremos con ***Form*** al conjunto de todas las fórmulas proposicionales.

Diremos que las fórmulas proposicionales φ y ψ son *LB-equivalentes*, y escribiremos $\varphi \equiv_{LB} \psi$, si y sólo si $\varphi \Rightarrow \psi$ y $\psi \Rightarrow \varphi$ son ambas demostrables en lógica básica.

Se demuestra que $\equiv_{LB}$ es una relación de equivalencia, y si indicamos con $|\varphi|$ la clase de equivalencia de la fórmula proposicional φ, esto es:

$$|\varphi| := \{\psi \in \textbf{\textit{Form}} \mid \psi \equiv_{LB} \varphi\}$$

y si definimos en el *conjunto cociente* ***Form***$/\equiv_{LB}$ formado por las clases de equivalencia de fórmulas proposicionales las operaciones $*$, $\rightarrow$ y la constante $\perp$ del siguiente modo:

$$|\varphi| * |\psi| := |\varphi \,\&\, \psi|$$

$$|\varphi| \rightarrow |\psi| := |\varphi \Rightarrow \psi|$$

$$\perp := |\sim (X_1 \Rightarrow X_1)|$$

entonces se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.3. $\mathcal{L} := \langle$***Form***$/\equiv_{LB}, *, \neg, \perp\rangle$ *es una BL-álgebra, llamada el* álgebra de Lindenbaum de la lógica básica. *Además,* φ *es demostrable en lógica básica si y sólo si* $|\varphi| = \top$.

Sea φ una fórmula proposicional obtenida a partir de las variables proposicionales $X_1,..., X_n$. Se tiene que

$$|\varphi| = \varphi(|X_1|,...,|X_n|)$$

Luego si $|\varphi|$ no es demostrable en lógica básica, entonces la ecuación

$$\varphi(X_1,...,X_n) \approx \neg \perp$$

no es satisfecha por $\mathcal{L}$, y por el Teorema 3.3, existe una BL-cadena C y una n-upla $(c_1,...,c_n)$ de elementos de C tales que $\varphi(c_1,...,c_n) \neq \top$.

Por lo tanto tenemos:

Teorema 3.4 (Hájek) φ *es demostrable en lógica básica si y sólo si para toda BL-cadena C y para toda n-upla* $(c_1,...,c_n)$ *de elementos de C, se tiene que* $\varphi(c_1,...,c_n) = \top$.

Para demostrar el teorema de completitud debemos refinar el teorema anterior, mostrando que como BL-cadena se puede tomar el segmento unitario real equipado con una t-norma continua.

Del Teorema 3.2 resulta que si una ecuación $\varphi(X_1,...X_n) \approx \psi(X_1,...X_n)$ no es satisfecha por alguna BL-álgebra, entonces debe existir una BL-cadena C y un número finito de elementos de C, digamos $\perp \leq a_1 < ... < a_n \leq \top$ *tal que* $\varphi(a_1,...a_n) \neq \psi(a_1,...a_n)$. Esta observación sugiere la siguiente definición.

Definición 3.5. Sean A, B BL-cadenas, y sea S un subconjunto finito de A tal que $\{\perp, \top\} \subseteq S$. *Una inmersión parcial de A en B con dominio S* es una función $f : S \rightarrow B$ que satisface las condiciones siguientes, donde x, y, z denotan elementos de S:

PE_1 $x \leq y$ si y sólo si $f(x) \leq f(y)$,
PE_2 $x * y = z$ implica $f(x) * f(y) = f(z)$,
PE_3 $x \rightarrow y = z$ implica $f(x) \rightarrow f(y) = f(z)$,
PE_4 $f(\perp) = \perp$, $f(\top) = \top$.

Diremos que una BL-cadena A es *parcialmente inmersible* en una BL-cadena B si y sólo si cada subconjunto finito de A que contenga a $\perp$ y a $\top$ es el dominio de una inmersión parcial de A en B.

Ahora no es difícil probar el resultado siguiente, que jugará un papel central en lo que sigue:

Lema 3.6. *Sea A una BL-cadena parcialmente inmersible en la BL-cadena B. Si A no satisface una ecuación, entonces tampoco la satisface B.*

Para probar el teorema de completitud necesitamos extender el resultado sobre descomposición de las t-normas continuas en términos de las tres t-normas básicas a BL-cadenas. Pero primero debemos estudiar las subclases de BL-álgebras determinadas por estas tres t-normas.

4. Algebras de Heyting lineales

Si a los axiomas que definen las BL-álgebras le agregamos el axioma:

H) $x * y = x \wedge y = x * (x \rightarrow y)$,

se obtienen las *álgebras de Heyting lineales,* que fueron introducidas en la década del 60 independientemente por A. Monteiro [37, 38] en la Argentina y por A. Horn [28, 29] en los Estados Unidos. Estas álgebras están relacionadas con ciertos sistemas de lógica intuicionista que fueron considerados, entre otros, por Gödel y Dummett.

Toda cadena (esto es, conjunto totalmente ordenado) C con elemento mínimo $\perp$ y elemento máximo $\top$ admite una única estructura de álgebra de Heyting, en la que las operaciones están definidas del modo siguiente, para todo x, y en C:

$$x * y = \min(x, y),\ x \to y = \begin{cases} \top \text{ si } x \leq y \\ y \text{ si } x > y. \end{cases}$$

En particular, resulta que $\langle [0, 1], *_H, \to_H, 0\rangle$ es un álgebra de Heyting lineal.

Es obvio que cualquier cadena finita puede ser inmersa, preservando la estructura de Heyting, en cualquier cadena infinita. Más formalmente:

Lema 4.1. *Toda álgebra de Heyting lineal totalmente ordenada es parcialmente inmersible en cualquier álgebra de Heyting totalmente ordenada infinita*

Corolario 4.2. *Una ecuación se satisface en toda álgebra de Heyting lineal si y sólo si se satisface en el álgebra* $\langle [0, 1], *_H, \to_H, 0\rangle$.

5. MV-álgebras

A comienzos de la década del 20, J. Lukasiewicz introdujo sistemas de lógica en los que las proposiciones admiten como valores de verdad números reales entre 0 y 1.

En realidad no consideró la t-norma $*_L$ del Ejemplo 3, sino que tomó como conectivos básicos la implicación y la negación, evaluados en [0, 1] por las funciones $\to_L$ y $\neg_L$, respectivamente.

Además conjeturó que todas las tautologías de este sistema podrían derivarse de los siguientes axiomas mediante la regla del modus ponens:

L_1 $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$,
L_2 $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$,
L_3 $(\sim \alpha \Rightarrow \sim \beta) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$,
L_4 $((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$.

El lógico polaco M. Wajsberg afirmó haber probado esta conjetura de Łukasiewicz, pero no llegó a publicar su demostración. En 1958, A. Rose y B. Rosser [42] publicaron una demostración de la conjetura de Łukasiewicz, utilizando métodos sintácticos. En 1959, C. C. Chang [4] dio otra demostración, basada en la teoría de las MV-álgebras, que había introducido el año anterior en [3]. La demostración de Chang utiliza la teoría de primer orden de los grupos abelianos ordenados. En 1993 [10] obtuve una demostración basada en la teoría algebraica de los grupos abelianos reticulados. En 1995, G. Panti [40] publicó una demostración basada en métodos de geometría algebraica. Finalmente, en 1997 junto con D. Mundici [11] (ver también [18]) encontramos una demostración elemental y autocontenida de la conjetura de Łukasiewicz.

Observemos que para todo número natural $n \geq 2$, el conjunto de número racionales

$$L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

es cerrado por las operaciones $\to_L$, $\neg_L$. Esto permite evaluar también los conectivos $\Rightarrow$ y $\neg$ en L_n, obteniendo así *el cálculo proposicional n-valente de Łukasiewicz*. Para n = 2, *se obtiene el cálculo proposicional clásico.*

El estudio algebraico de los sistemas finito-valentes de Łukasiewicz fue iniciado a comienzos de la década del 40 por G. Moisil [34, 35], quien introdujo las *álgebras de Łukasiewicz n-valentes,* que son retículos distributivos munidos con ciertas operaciones unarias (negación y modalidades).

Estas álgebras fueron estudiadas en detalle en mi tesis doctoral, presentada en la Universidad Nacional del Sur en 1969, bajo la dirección de A. Monteiro (ver [5, 6]). Si bien dan origen a una interesante teoría algebraica y Moisil las aplicó a la síntesis de circuitos, estas álgebras no se corresponden con la lógica n-valente de Łukasiewicz para n > 4. Las estructuras adecuadas son las *álgebras de Łukasiewicz propias,* que introduje a comienzos de los 80 [7, 8, 9]. Se obtienen agregando nuevas operaciones binarias de las álgebras de Łukasiewicz n-valentes. El interés de esta algebrización de los cálculos finito-valentes de Łukasiewicz es que permite presentarlos como extensiones del cálculo intuicionista. Moisil introdujo también cálculos infinito-valentes, que aplicó a la formalización de la lógica borrosa (ver [36]). Una muy completa exposición de la teoría de las álgebras de Łukasiewicz, tanto finito como infinito valentes, se encuentra en [2].

En el segmento unitario real [0, 1] podemos considerar una operación binaria $\oplus_L$, llamada *suma truncada,* definida por:

$$x \oplus_L y := \min(1, x + y). \tag{7}$$

Observemos que la operaciones $\oplus_L$ y $*_L$ están relacionadas del modo siguiente:

Para $x, y \in [0, 1]$, $x \oplus_L y = \neg(\neg x *_L \neg y)$
$$\text{y} \quad x *_L y = \neg(\neg x \oplus_L \neg y) \tag{8}$$

Además, se tiene que:

$$x \rightarrow_L y = \neg x \oplus_L y \tag{9}$$

Estas observaciones motivan la siguiente definición de MV-álgebras:

Definición 5.1. Una *MV-álgebra* es un sistema $\langle A, \oplus, \neg, \bot\rangle$ tal que A es un conjunto no vacío, $\oplus$ es una operación binaria sobre A, $\neg$ es una operación unaria y $\bot$ es un elemento de A, que satisfacen las siguientes ecuaciones:

MV_1 $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
MV_2 $x \oplus y = y \oplus x$
MV_3 $x \oplus \bot = x$
MV_4 $\neg\neg x = x$
MV_5 $x \oplus \neg\bot = \neg\bot$
MV_6 $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$

En toda MV-álgebra A definimos el elemento $\top$ y las operaciones binarias $\odot$, $\ominus$ y $\rightarrow$ como sigue:

$$\top := \neg\bot, \tag{10}$$
$$x \odot y := \neg(\neg x \oplus \neg y), \tag{11}$$
$$x \ominus y := x \odot \neg y. \tag{12}$$
$$x \rightarrow y := \neg x \oplus y. \tag{13}$$

Las relaciones dadas por (8) y (9) en el segmento [0, 1] se pueden generalizar, como lo muestra el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en [25, 43].

Teorema 5.2. Sea $A = \langle A, *, \rightarrow, \bot\rangle$ *una BL-álgebra que satisface la ecuación*

$$\neg\neg x = x. \tag{14}$$

Si para cada $x, y \in A$ definimos $x \oplus y := \neg(\neg x * \neg y)$, entonces $\langle A, \oplus, \neg, \bot\rangle$ *es una MV-álgebra, y se tiene que* $x \rightarrow y = \neg x \oplus y$.

Recíprocamente, si $\langle A, \oplus, \neg, \bot\rangle$ *es una MV-álgebra y si definimos las operaciones binarias* $\odot$ *y* $\rightarrow$ *por las ecuaciones (11) y (13), respectivamente, entonces* $\langle A, \odot, \rightarrow, \bot\rangle$ *es una BL-álgebra que satisface la ecuación (14).*

La importancia de las MV-álgebras va más allá de sus vinculaciones con la lógica borrosa. Esto se debe, principalmente, a que están fuertemente relacionadas con los grupos abelianos reticulados.

Recordemos que un *grupo abeliano reticulado,* o abreviadamente, *ℓ-grupo,* es un grupo conmutativo equipado con una estructura de retículo de modo que se satisfagan las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$x + (y \vee z) = (x \vee z) + (x \vee z) \quad \text{y}$$
$$x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z). \tag{15}$$

Dado un ℓ-grupo G, indicaremos con $\leq$ el orden derivado de la estructura reticular: $x \leq y$ si y sólo si $x = x \wedge y$. Denotaremos con G^+ y G^- al *cono positivo* y al *cono negativo* de G, respectivamente. Esto es $G^+ = \{x \in G : x \geq 0\}$, $G^- = \{x \in G : x \leq 0\}$. G es totalmente ordenado si y sólo si $G = G^+ \cup G^-$.

Diemos que $u \in G$ es una *unidad fuerte* si para todo $x \in G$ tal que $x > 0$, existe un número natural n tal que $x \leq nu$.

La teoría de los ℓ-grupos con unidad fuerte está estrechamente vinculada al estudio de las magnitudes. Un ejemplo importante está dado por el grupo aditivo de los números reales con su orden natural, que denotaremos por **R**. La propiedad arquimediana de los reales nos dice que todo número real $u > 0$ es una unidad fuerte de **R**. Denotaremos con **Q** y **Z** a los subgrupos de **R** formados por los números racionales y los números enteros, respectivamente. La teoría de los grupos reticulados (no necesariamente abelianos) está ampliamente desarrollada en las monografías [1, 22].

Dado un ℓ-grupo G y una unidad fuerte $u \in G$, con $[0, u]$ denotaremos al conjunto de los elementos que están entre 0 y u, esto es:

$$[0, u] = \{x \in G : 0 \leq x \leq u\}.$$

Si definimos las operaciones $\oplus$ y $\neg$ en [0, 1] por las fórmulas:

$$x \oplus y = u \wedge (x + y)$$

y

$$\neg x = u - x,$$

entonces el sistema $\Gamma(G, u) = \langle [0, u], \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra.

Observemos que $\langle [0, 1], \oplus_L, \neg_L, 0\rangle = \Gamma(\boldsymbol{R}, 1)$.

El resultado fundamental de la teoría de las MV-álgebras es que toda MV-álgebra es de la forma $\Gamma(G, u)$. Esto fue probado por Chang [4] para el caso de MV-álgebras totalmente ordenadas, y por Lacava [30] para el caso general. Mundici (a quién se debe la notación Γ) dio un resultado mucho más preciso en [39] (ver también [11, 13, 18]):

Teorema 5.3 *Γ establece una equivalencia funtorial entre la categoría $\mathcal{G}$, cuyos objetos son los ℓ-grupos con una unidad fuerte destacada y cuyos morfismos son los homomorfismos de ℓ-grupos que preservan las unidades, y la categoría $\mathcal{M}$, formada por las MV-álgebras y los correspondientes homomorfismos.*

A la luz del resultado anterior, las MV-álgebras pueden ser consideradas como una presentación ecuacional de los ℓ-grupos con unidad fuerte.

Sea G un ℓ-grupo totalmente ordenado. Un teorema de Gurevich y Kokorin [24] afirma que todo subconjunto finito $S \subset G$ es el dominio de un isomorfismo parcial de G en $\boldsymbol{R}$ (para una demostración elemental y autocontenida de un resultado algo más general ver [14]). De este resultado, vía el funtor Γ, se obtiene que:

Lema 5.4. *Toda MV-álgebra totalmente ordenada es parcialmente inmersible en $\langle [0, 1], *_L, \neg_L, 0\rangle$.*

Corolario 5.5 (Chang [4]) *Una ecuación se satisface en toda MV-álgebra si y sólo si se satisface en el álgebra $\langle [0, 1], *_L, \to_L, 0\rangle$.*

Cabe señalar que Mundici descubrió otras aplicaciones de las MV-álgebras, al probar que están naturalmente relacionadas con el orden de Murray - von Neumann para las proyecciones en álgebras de operadores en el espacio de Hilbert [39, 19, 18], con la teoría de códigos a través de los juegos de Ulam [18, Chapter 5] y también con la teoría de desingularización de variedades tóricas [18, §9.2].

Utilizando resultados de MV-álgebras se caracterizó el espectro primo de los ℓ-grupos con unidad fuerte [15] (ver también [20]). En la tesis doctoral de N. G. Martínez se desarrolló una dualidad topológica para las MV-álgebras [31] y en la de D. Gluschankof [23] se caracterizaron las MV-álgebras inyectivas.

6. PL-álgebras

Una *PL-álgebra* es una BL-álgebra A que satisface los dos axiomas siguientes:

A_7 $(\neg\neg z * ((x * z) \to (y * z))) \to (x \to y) = \top$,
A_8 $x \wedge \neg x = \bot$.

Estas álgebras fueron definidas por Hájek, Godo y Esteva en [27]. Es fácil verificar que $\langle [0, 1], *_P, \to_P, 0\rangle$ es un ejemplo de PL-álgebra.

Consideramos la función f: $[0, 1] \to \mathbf{R}^- \cup \{-\infty\}$ definida del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Esta función nos permite transferir la t-norma $*_P$ y su adjunta $\to_P$ a la semirrecta negativa $\mathbf{R}^- \cup \{-\infty\}$.

$$u*v=\begin{cases}u+v & \text{si } u>-\infty, v>-\infty\\ -\infty & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

$$u\to v=\begin{cases}0 & \text{si } u\le v\\ v-u & \text{si } u>v>-\infty\\ -\infty & \text{si } u>v=-\infty.\end{cases}$$

$$\neg u=u\to-\infty=\begin{cases}0 & \text{si } u=-\infty\\ -\infty & \text{si } u>-\infty.\end{cases}$$

Esta observación sugiere la siguiente forma de obtener PL-álgebras.

Sea G un ℓ-grupo y $\perp$ un elemento no perteneciente a G. En el conjunto $G^- \cup\{\perp\}$ definimos las operaciones binarias $*$ y $\to$ como sigue:

$$x*y=\begin{cases}x+y & \text{si } x,y\in G^-,\\ \perp & \text{en caso contrario,}\end{cases}$$

y

$$x\to y=\begin{cases}0\wedge(y-x) & \text{si } x,y\in G^-,\\ 0 & \text{si } x=\perp,\\ \perp & \text{si } x\in G^- \text{ e } y=\perp.\end{cases}$$

Es fácil verificar que $\langle G^-\cup\{\perp\}, *, \to, \perp\rangle$ es una PL-álgebra, que denotaremos por $\mathcal{P}(G)$.

El siguiente teorema fue demostrado en [16]:

Teorema 6.1 *Sea A una PL-álgebra. Existe un ℓ-grupo G tal que A es isomorfa a $\mathcal{P}(G)$ si y sólo si A satisface la siguiente condición:*

(c) Para todo $z\neq\perp$, $\neg z=\perp$.

En este caso, el ℓ-grupo G es único a menos de isomorfismos.

Como toda PL-álgebra totalmente ordenada satisface la condición (c) del teorema anterior, podemos utilizar nuevamente el Teorema de Gurevich y Kokorin mencionado en la sección anterior y la inversa de la función f definida por (16) para obtener el siguiente resultado, enunciado inicialmente por Hájek:

Lema 6.2 *Toda PL-álgebra totalmente ordenada es parcialmente inmersible en $\langle[0, 1]*_P, \to, 0\rangle$.*

Más informacion sobre la estructura de las PL-álgebras puede verse en [16].

7. La estructura de las BL-cadenas

Estamos ahora en condiciones de generalizar el teorema de estructura visto en §1 para t-normas continuas al caso de las BL-cadenas.

Comenzaremos observndo que si u, v son elementos idempotentes con respecto a la operación $*$ de una BL-cadena C, entonces el conjunto

$$[u, v] = \{x\in C : u\le x\le v\}$$

con las operaciones $*$, $\to_{uv}$ definidas por $x\to_{uv} y = v\wedge(x\to y)$, y $\perp = u$ deviene una BL-cadena, que denotaremos por $[u, v]_C$.

La siguiente construcción, debida a Hájek [26], es crucial para comprender la estructura de las BL-cadenas.

Definición 7.1 Sean $(C_i, *_i, \to_i, \perp_i, \top_i)$, $i = 1, 2$, dos BL-cadenas, y para simplificar las notaciones, supongamos que $\top_1 = \perp_2$ y $(C_1\setminus\{\top_1\})\cap(C_2\setminus\{\top_2\})=\emptyset$. La *suma ordinal* $C_1 \sqcup C_2 := (C_1\cup C_2, *, \to, \perp_1, \top_2)$ es una nueva BL-cadena cuyas operaciones $*$, $\to$ están definidas como sigue:

$$x*y=\begin{cases}x *_i y & \text{si } x, y \text{ están en } C_i,\ i=1,2,\\ x\wedge y & \text{si } x\in C_i, y\in C_j \text{ e } i\neq j.\end{cases}$$

$$x\to y=\begin{cases}\top_2, & \text{si } x\le y\\ x\to_i y, & \text{si } x>y \text{ y } x,y\in C_i,\ i=1,2\\ y, & \text{si } x>y \text{ y } x\in C_2,\ y\in C_1\end{cases}$$

La definición de la operación ⊔ se extiende de modo natural para más de dos componentes.

Ejemplo 4 (Hájek [26] Sea $C = [0, 2]$ con su orden natural como subconjunto de $\boldsymbol{R}$ y equipado con las operaciones $*$ y $\to$ definidas del modo siguiente:

$$x*y=\begin{cases}1+(x-1)(y-1) & \text{si } x,y\in(1,2],\\ x & \text{si } x\in[0,1] \text{ e } y\in(1,2],\\ (x+y-1)\vee 0 & \text{si } x,y\in[0,1].\end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le y, \\ \dfrac{y-1}{x-1}+1 & \text{si } x > y \text{ y } x, y \in (1, 2], \\ y & \text{si } x > y, x \in (1, 2] \text{ e } y \in [0, 1], \\ 1-x+y & \text{si } x > y \text{ y } x, y \in [0, 1]. \end{cases}$$

Se tiene que 1 es un idempotente de C y que $C = [0, 1]_C \sqcup [1, 2]_C$. Notemos que $[0, 1]_C$ es la MV-álgebra $\langle [0, 1], *_L, \to_L, 0\rangle$ y que $[1, 2]_C$ es una PL-álgebra isomorfa a $\langle [0, 1] *_P, \to_P, 0\rangle$.

La siguiente noción también se debe a Hájek [26].

Definición 7.2 Sea C una BL-cadena. Un par de subconjuntos de C, (X, Y) se dice una *cortadura* en C si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

C_1 $X \cup Y = C$.
C_2 $x \le y$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$,
C_3 Y es cerrado por $*$,
C_4 $x * y = x$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Ejemplo 5 Sea C una BL-cadena, u un elemento idempotente de C tal que $\bot < u < \top$, y consideremos los conjuntos $X = \{x \in C \mid x < u\}$, $\bar{X} = X \cup \{u\}$, $Y = \{x \in C \mid x > u\}$ e $\bar{Y} = Y \cup \{u\}$. Entonces $(\bar{X}, \bar{Y})$, $(X, \bar{Y})$ y $(\bar{X}, Y)$ son ejemplos de cortaduras en C.

Las cortaduras del tipo indicado en el ejemplo anterior se dicen *determinadas por el idempotente u*. Si C es la cadena del Ejemplo 4, es fácil verificar que $C' = C \setminus \{1\}$ es una subálgebra de C. El par $([0, 1), (1, 2])$ es una cortadura en C' que no está determinada por un idempotente. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 7.3 Una BL-cadena C se dice *saturada* si toda cortadura (X, Y) en C está determinada por un idempotente de C.

Teorema 7.4 (Hájek [26]) *Toda BL-cadena C se puede incluir isomórficamente en una BL-cadena saturada $\bar{C}$, de modo que C sea densa en $\bar{C}$, esto es, para todo par de idempotentes $u < u'$ in $\bar{C} \setminus C$, existe $x \in C$ tal que $u < x < u'$.*

El siguiente lema está probado en [21].

Lema 7.5 *Sea C una BL-cadena saturada y sea E el conjunto de los elementos idempotentes para la operación $*$ de C. Se tiene que:*

(i) Todo subconjunto $A \subseteq E$ tiene sup *e* inf *en C, y ambos pertenecen a E.*

(ii) Para todo $c \in E$ existe el mayor intervalo cerrado $[a, b] \subseteq E$ tal que $c \in [a, b]$.

(iii) Para cada $x \in C \setminus E$ existe un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $x \in [a, b]$ y $[a, b] \cap E = \{a, b\}$.

Vamos a denotar por $I(E)$ al conjunto de los intervalos definidos en (iii) del lema anterior, esto es, $I(E) = \{[a, b] \mid a, b \in E, a < b, (a, b) \cap E = \emptyset\}$. Además en $G(E)$ denotaremos al conjunto de los intervalos propios (o sea, no reducidos a un elemento) definidos en (ii) y escribimos $E_{is} = E \setminus (I(E) \cup G(E))$. Con estas notaciones podemos enunciar el teorema fundamental de la estructura de las BL-cadenas, que generaliza al visto en §1 para t-normas continuas. Este teorema fue probado por Hájek [26], pero con el agregado de hipótesis adicionales, que se demostraron innecesarias en [21].

Teorema 7.6 *Sea C una BL-cadena saturada e I el conjunto definido por*

$$I = \{a \in C : a \in E_{is} \text{ o existe } b \in C \text{ tal que } [a, b] \in I(E) \cup G(E)\},$$

totalmente ordenado por el orden heredado de la cadena C. Para cada $a \in I$, sea M_a o bien $[a, a]$, si $a \in E_{is}$, o la correspondiente álgebra $[a, b]_C$ para cada $[a, b] \in I(E) \cup G(E)$, *en el otro caso. Entonces, $C = \sqcup_{a \in I} M_a$. Para $[a, b] \in G(E)$, $[a, b]_C$ es un álgebra de Heyting lineal. Cuando $[a, b] \in I(E)$, entonces $[a, b]_C$ es o bien una MV-álgebra o bien una PL-álgebra.*

8. La completitud de la Lógica Borrosa Básica

A la luz del Teorema 3.4 y del Lema 3.6, para probar la completitud de los axiomas de la lógica borrosa básica con respecto a las t-normas continuas es suficiente probar que toda BL-cadena es inmersible en una BL-cadena del tipo $\langle [0, 1], *, \to, 0\rangle$, donde $*$ es una t-norma continua y $\rightarrow$ su adjunta. Además, del Teorema 7.4 resulta que podemos limitarnos a considerar BL-cadenas saturadas.

Sea entonces C una BL-cadena saturada y S un subconjunto finito de C conteniendo los elementos $\perp$ y $\top$. Por el Teorema 7.6, $C = \bigcup_{a \in I} M_a$, y como s es finito, podemos encontrar un número finito de elementos de I, digamos $a_{i_0}, ..., a_{i_n}$, *tal que* $S \subseteq D = \bigcup_{j=0}^{n} M_{a_{ij}}$. Sean $r_0, ..., r_{n+1}$ números racionales tales que $0 = r_0 < r_1 < ... < r_n < r_{n+1} = 1$. Podemos definir entonces sobre el segmento unitario real $[0, 1]$ una t-norma continua $*$ de modo que su restricción a cada uno de los intervalos $[r_j, r_{j+1}]$ resulte equivalente a $*_H$, $*_P$ o $*_L$ según que M_{aij} sea un álgebra de Heyting lineal, una PL-álgebra o una MV-álgebra, para $j = 0, 1, ..., n$. Ahora teniendo en cuenta los Lemas 4.1, 5.4 y 6.2 se puede probar el siguiente teorema:

Teorema 8.1 *Sea C una BL-cadena saturada y S un subconjunto finito de C conteniendo los elementos* $\perp$ y $\top$. *Entonces existe una t-norma continua* $*$ *que admite una inmersión parcial de C en* $\langle [0, 1], *, \rightarrow, 0 \rangle$ *con dominio S.*

Corolario 8.2 (Teorema de completitud de la Lógica Básica) *Toda tautología de la Lógica Difusa Básica es demostrable a partir de los axiomas* $T_1 - T_7$ *mediante la regla del modus ponens.*

Para finalizar, me gustaría hacer algunas consideraciones sobre la representación de las proposiciones en lógicas polivalentes.

Es bien sabido que las proposiciones de la lógica clásica se pueden representar como *funciones booleanas,* esto es, funciones de $\{0, 1\}$ en $\{0, 1\}$. Esto a su vez permite la representación de las proposiciones por circuitos en serie y en paralelo, y por consiguiente su implementación computacional. Es natural buscar una representación análoga para las lógicas polivalentes.

Uno de los primeros resultados en esta dirección se debe a McNaughton [32], quien probó que las proposiciones de la lógica infinito-valente de Łukasiewicz que se pueden construir con n variables proposicionales están en correspondencia con las funciones de $[0, 1]^n$ en $[0, 1]$ que son continuas (con la topología natural del hipercubo real n-dimesional) y lineales a trozos, con coeficientes enteros. La demostración dada por McNaughton es no constructiva. Una demostración constructiva fue dada por Mundici (ver [18], donde se pueden ver también las representaciones de las proposiciones para los cálculos finito-valentes de Łukasiewicz). Representaciones funcionales para las proposiciones de la lógica intuicionista lineal y la lógica producto fueron obtenidas en [29] y en [16], respectivamente. Aún falta encontrar una caracterización funcional para las proposiciones de la Lógica Borrosa Básica, o, en términos algebraicos, una descripción de las BL-álgebras libres.

También está faltando una teoría satisfactoria de la cuantificación en lógica polivalente.

Referencias

[1] Bigard, A., Keimel, K, and Wolfenstein, S. *Groupes et anneaux réticulès,* Lectures Notes in Mathematics, v. 108, Springer-Verlag, New York - Heildelberg - Berlin (1977).

[2] Boicescu, V., Filipoiu, A., Georgescu, G. and Rudeanu, S. *Łukasiewicz-Moisil Algebras.* North-Holland, Amsterdam (1991).

[3] Chang, C. C. *Algebraic analysis of many-valued logics,* Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 467-490.

[4] Chang, C. C., *A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms,* Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), 74-90.

[5] Cignoli, R., Moisil algebras, Notas de Lógica Matemática N° 27, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, (1970).

[6] Cignoli, R., *Representation of Łukasiewicz and Post algebras by continuous functions,* Colloquium Mathematicum 24 (1972), 127-138.

[7] Cignoli, R. *Some algebraic aspects of many-valued logics.* En: Third Brazilian Conference on Mathematical Logic, Recife, (1979). Edited by A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, A. M. Sette. Sociedade Brasileira de Lógica, São Paulo, (1980), p. 49-69.

[8] Cignoli, R., *Proper n-valued Łukasiewicz algebras as S-algebras of Łukasiewicz n-valued propositional calculi,* Studia Logica 41 (1982), 3-16.

[9] Cignoli, R. *An algebraic approach to elementary theories based on n-valued Łukasiewicz logics,* Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Mathematik, 30 (1984), 87-96.

[10] Cignoli, R. *Free ordered abelian groups and varieties of MV-algebras.* In: IX Latin American Symposium on Mathematical Logic, Bahía Blanca, (1993) p. 113-118. (*Notas de Lógica matemática, v. 38, part I*).

[11] Cignoli, R. and Mundici, D. *An elementary proof of Chang's completeness theorem for the infinite-valued calculus of Łukasiewicz,* Studia Logica 58 (1997), 79-97.

[12]Cignoli, R. and Mundici, D. *An invitation to Chang's MV-algebras.* In Conference on Algebra and Model Theory, Dresden 1995 (Droste M. and Göbel, R., Editors). Gordon and Breach, Amsterdam, (1997), pp. 171-197.

[13] Cignoli, R. and Mundici, D. *An elementary presentation of the equivalence between MV-algebras and ℓ-grupos with strong unit,* Studia Logica 61, 49-64.

[14] Cignoli, R. and Mundici, D. *Partial isomorphisms of totally ordered abeliam groups and Hájek's completeness theorem for Basic Logic,* Multiple-Valued Logic.

[15] Cignoli, R. and Torrens, A. *The poset of prime ℓ-ideals of an abelian ℓ-group with a strong unit,* Journal of Algebra 184 (1996), 604-612.

[16] Cignoli, R. and Torrens, A. *An algebraic analysis of Product Logic,* Multiple-Valued Logic, 5 (2000), 45-65.

[17] Cignoli, R., D'Ottaviano, I.M.L. and Mundici, D. Algebras das lógicas de Łukasiewicz, Coleção CLE, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, (1994).

[18] Cignoli, R., D'Ottaviano, O.M.L. and Mundici, D. Algebraic foundations of many-valued reasoning, Kluwer, Dordrecht-Boston - London, (2000).

[19] Cignoli, R., Elliott, G. A. and Mundici, D. *Reconstructing C*-algebras from their Murray von Neumann orders,* Advances in Mathematics 101 (1993), 166-179.

[20] Cignoli, R., Gluschankof, D. and Lucas, F. *Prime spectra of lattice-ordered abelian groups,* Journal of Pure and Applied Algebra 136 (1999), 217-229.

[21] Cignoli, R., Esteva, F., Godo, L. and Torrens, A. *Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms and their residua,* Soft Computing 4 (2000), 106-112.

[22] Darnel, M. R. Theory of lattice-ordered groups, Marcel Dekker Inc, New York - Basel - Hong Kong, 1995.

[23] Gluschankof, D. *Prime deductive systems and injective objects in the algebras of Łukasiewicz infinite-valued calculi,* Algebra Universalis 29 (1992), 354-377.

[24] Gurevich, Y. S. and Kokorin, A. I. *Universal equivalence of ordered abelian groups* (en ruso), Algebra i Logica, 2 (1963), 37-39.

[25] Hájek, P. Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer, Dordrecht - Boston - London, (1998).

[26] Hájek, P. *Basic fuzzy logic and BL-algebras,* Soft Computing 2 (1998), 124-128.

[27] Hájek, P., Godo, L. and Esteva, F. *A complete many-valued logic with product conjunction,* Arch. Math. Logic 35 (1996), 191-208.

[28] Horn, A. *Logic with truth values in a linearly ordered Heyting algebra,* Journal of Symbolic Logic 34 (1969), 395-408.

[29] Horn, A. *Free L-algebras,* Journal of Symbolic Logic 34 (1969), 475-480.

[30] Lacava, F. *Alcune proprietá delle Ł-algebre e delle Ł-algebre esistenzialmente chiuse,* Bolletino Unione Matematica Italiana, A (5) 16 (1979), 119-133.

[31] Martínez, N. G. *The Priestley duality for Wajsberg algebras,* Studia Logica 49 (1990), 31-46.

[32] McNaughton, R. *A theorem about infinite-valued sentential logic,* Journal of Symbolic Logic 16 (1951), 1-13.

[33] Menu, J. and Pavelka, J. *A note on tensor products on the unit interval,* Comm. Math. Univ. Carolinae 17 (1976), 71-83.

[34] Moisil, G. *Recherches sur les logiques nonchrysippiènnes,* Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, 26 (1940), 431-436. Reproducido en [36, p. 195-232].

[35] Moisil, G. *Notes sur les logiques nonchrysippiènes,* Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, 27 (1941) 9, 86-98. Reproducido en [36, p. 233-243].

[36]Moisil, G. Essays sur les logiques nonchrysippiènnes. Académie de la République Socialiste de Roumanie, Bucharest, 1971.

[37] Monteiro, A. *Linéarisation de la logique positive de Hilbert Bernays,* Revista de la Unión Matemática Argentina 20 (1962), 308-309.

[38] Monteiro, A. *Sur les algébres de Heyting simétriques*, Portugaliae Mathematica 39 (1980), 1-237.

[39] Mundici, D. *Interpretation of AF C*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus,* Journal of Functional Analysis 65 (1986), 15-63.

[40] Panti, G. A *geometric proof of the completeness of Łukasiewicz calculus*, Journal of Symbolic Logic, 60 (1993), 563-578.

[41] Rasiowa, H. and Sikorski, R. The mathematics of metamathematics, Państowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1963.

[42] Rose, A. and Rosser, B. J. *Fragments of many-valued statement calculi,* Transactions of the American Mathematical Society, 87 (1958), 1-53.

[43] Turunen, E. Mathematics behind fuzzy logic, Physica-Verlag, Heilderberg - New York, 1999.

[44] Zadeh, L.A. *Fuzzy sets,* Information and Control 8 (1965), 338-353.

Manuscrito recibido y aceptado en diciembre de 2000.