Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. Nat., Buenos Aires, tomo 45, 1993

OPTIMIZACION DE METODOS VARIACIONALES

por Patricio A. A. Laura

Director e Investigador Científico - Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET—SENID-ACCE) y Profesor Titular - Departamento de Ingeniería - Universidad Nacional del Sur 8000 - Bahía Blanca - ARGENTINA

RESUMEN

En 1870 Lord Rayleigh propuso su actualmente clásico método, basado en una aproximación de una sola función. El método fue luego extendido por Ritz en un trabajo publicado en 1908. Por otra parte, en el año 1894, Rayleigh sugirió la posibilidad de optimizar los autovalores minimizándolos con respecto a un parámetro exponencial contenido en la función aproximante. Este procedimiento optimizador ha sido usado con frecuencia en la última década, habiendo sido extendido a otros métodos variacionales. Este trabajo presenta una síntesis de los desarrollos más recientes que hacen uso del enfoque optimizador de Lord Rayleigh.

ABSTRACT

Lord Rayleigh proposed his now classical method (based on a one-term deflection function) in 1870. The method was extended by Ritz in 1908. On the other hand he suggested in 1894 the possibility of optimizing the eigenvalues (natural frequencies or buckling loads) by minimizing them with respect to an exponential parameter contained in the coordinate function. This optimization approach has become increasingly popular in the last decade and it has been extended to other variational methods and bounding techniques. The present paper reviews some recent developments in this area.

1. INTRODUCTION

Es bien conocido el hecho de que los métodos de Rayleigh-Ritz y de Galerkin constituyen técnicas sumamente poderosas que permiten la solución aproximada de una gama enorme de problemas de la física, mecánica del continuo, control automático, procesos químicos, etc.

Por otra parte la popularidad de soluciones halladas mediante la computadora digital y su bajo costo ha hecho que numerosos estudiantes de ingeniería y ciencias aplicadas hayan perdido tanto capacidad para la solución analítica de estos problemas como comprensión física de los problemas investigados (Eshleman, 1981).

Los métodos analíticos de Rayleigh-Ritz, Galerkin y Kantorovich pueden ser utilizados para obtener la solución de muchos problemas científica y técnicamente importantes. Por otra parte constituyen fundaciones de numerosas técnicas utilizadas mediante la computadora.

Lord Rayleigh sugirió en 1894, incluir un parámetro exponencial indeterminado en las funciones coordenadas. Como los métodos mencionados generan cotas superiores en el caso de problemas de autovalores, uno puede optimizarlos minimizándolos con respecto al parámetro indeterminado. Si se trata de un problema de campo uno minimiza la funcional con respecto al parámetro de optimización. La optimización de autovalores superiores ha sido lograda recientemente (Laura y Cortínez, 1986 a).

Los Profesores Charles W. Bert (Universidad de Oklahoma) y Roberto Schmidt (Universidad de Detroit) han popularizado el uso del "método optimizado de Rayleigh". También han contribuido en forma significativa, en Argentina, el Instituto de Mecánica Aplicada, la Universidad Nacional del Sur, la Facultad Regional Bahía Blanca (UTN) y la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Esta reseña complementa la publicada por Bert en 1987. Por otra parte se detalla la optimización de los métodos de Galerkin y de Kantorovich así como la del método de cotas de Kohn-Kato (Laura y Cortínez, 1986 b) y la correspondiente a la metodología de ecuaciones integrales (Laura y Gutierrez, 1990). También es importante señalar que varios códigos de elementos finitos han implementado la técnica de optimización de Rayleigh (Laura et al., 1986; Newberry et al., 1987, Filipich et al., 1988c and Utjes et al., 1989).

Finalmente se debe señalar el mérito de Stodola (1927) quien ha sido uno de los primeros usuarios del enfoque (quizás sin conocer la sugerencia de Lord Rayleigh) al calcular la frecuencia fundamental de vibración de un alabe de turbina.

2. OPTIMIZACION DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA MOSTRADO EN LA FIGURA 1. CASO DE MODOS AXISIMETRICOS

El método de Rayleigh-Ritz requiere la minimización de la funcional:

$$J[W] = (\text{Máxima Energía de Deformación}) - (\text{Máxima Energía Cinética}) = U_{max} - T_{max} \qquad (1)$$

con respecto a las constantes arbitrarias C_i que multiplican a cada función coordenada $f_i\,(r,\gamma)$ que se usa para aproximar la función amplitud de desplazamiento $W(r)$:

$$W(r) \cong W_a(r) = \sum_{i=0}^{N} C_i\, f_i\,(r,\gamma) \qquad (2)$$

siendo γ el parámetro de optimización exponencial.

Las $f_i(r,\gamma)$ deben satisfacer, al menos, las condiciones esenciales de contorno. Por otra parte

$$2\,U_{max} = \frac{D_1\pi}{a^2}\int_0^1 \left\{\left(\frac{d^2W}{dR^2} + \frac{1}{R}\,\frac{dW}{dR}\right)^2 - 2\,(1-\mu_1)\left[\frac{d^2W}{dR^2}\left(\frac{1}{R}\,\frac{dW}{dR}\right)\right]\right\} R\,dR$$

$$+ \frac{D_2\pi}{a^2}\int_0^{r_0/a} \left\{\left(\frac{d^2W}{dR^2} + \frac{1}{R}\,\frac{dW}{dR}\right)^2 - 2\,(1-\mu_2)\left[\frac{d^2W}{dR^2}\left(\frac{1}{R}\,\frac{dW}{dR}\right)\right]\right\} R\,dR$$

$$+ \left[-\frac{D_1\pi}{a^2}\left(\frac{d^2W}{dR^2} + \frac{\mu_1}{R}\,\frac{dW}{dR}\right)\frac{dW}{dR}\right]_{R=1}$$

$$+ [kW^2\,\pi a]_{R=1} \qquad (3a)$$

$$T_{max} = \rho_1 h_1 \omega^2 \pi a^2 \int_0^1 W^2 R\,dR$$

$$+ \rho_2\, h_2 \omega^2 \pi a^2 \int_0^{r_0/a} W^2\,R\,dR \qquad (3b)$$

donde

$$R = r/a\ ;\ D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12\,(1-\mu_1^2)}\ ;$$

$$D_2 = \frac{E_2(h_1+h_2)^3}{12\,(1-\mu_2^2)} - \frac{E_2 h_1^3}{12\,(1-\mu_2^2)}$$

Siguiendo a un estudio publicado en la literatura (Avalos et al., 1987) uno expresa $f_i(r,\gamma)$ en la conveniente forma polinómica

$$f_i(r,\gamma) = [\alpha_i\,(r/a)^\gamma + \beta_i\,(r/a)^2 + 1]\,(r/a)^{2i} \qquad (4)$$

donde los α_i 's y β_i 's son obtenidos reemplazando cada función coordenada en las condiciones de borde.

Minimizando a la funcional (1) con respecto a la C_i 's conduce a un sistema lineal homogéneo en la C_i 's y la condición de no trivialidad conduce a un determinante-ecuación en las frecuencias naturales del sistema. Dado que

$$\omega_i = \omega_i\,(\gamma) \qquad (5)$$

requiriendo que

$$\frac{d\,\omega_i}{d\gamma} = 0 \qquad (6)$$

uno optimiza a los autovalores del problema.

En el caso de una placa de espesor uniforme los autovalores estan en excelente acuerdo con los exactos, tanto para los modos simétricos como antisimétricos (Avalos et al. 1987, 1988).

Se han obtenido también verificaciones experimentales (Avalos et al., 1987) y se han realizado estudios de vibraciones forzadas (Laura et al., 1990).

2.1. **Otros estudios de placas vibrantes**

Resulta de interés presentar un listado de algunos de los estudios realizados sobre placas vibrantes mediante el método optimizado de Rayleigh-Ritz:

— placas rectangulares continuas (Ercoli et al., 1989)

— placas rectangulares cuyo espesor varía en forma discontinua (Ercoli et al., 1990)

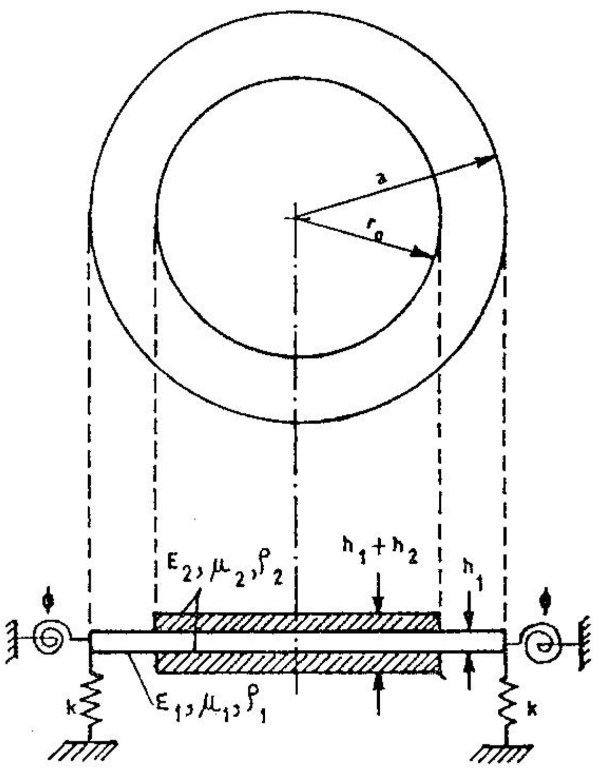

Fig. 1.— Placa Circular de Espesor Variable en Forma Discontinua y Cuyo Borde Está Elásticamente Restringido Contra Translación y Rotación.

— placas rectangulares isótropas con una inclusión ortótropa (Ercoli et al., 1992) siendo este problema de especial interés a la industria aeronáutica

— vibración forzada de una plaqueta utilizada en ciertas prótesis cardiológicas (Laura et al., 1988c)

— placa triangular de espesor variable y un borde libre (Cortinez et al., 1991)

— placa triangular sometida a esfuerzos en el plano (Laura y Gutierrez, 1991)

— placas circulares teniendo en cuenta diversas complejidades (Sanzi et al., 1988; Maurizi et al., 1990; Laura et al., 1991a y 1991b)

— vibraciones de placas elípticas (Gutierrez et al., 1990b)

— vibraciones en su plano (Gutierrez y Laura, 1989).

Por otra parte el efecto de perturbaciones en el borde también ha sido estudiado (Laura et al., 1988e).

También se ha sugerido el uso de funciones exponenciales siendo el parámetro de optimización incluído en el exponente de la función (Laura y Cortínez, 1989b). Este enfoque ha sido utilizado en mecánica cuántica (Pauling y Bright-Wilson, 1935) y en algunos problemas de la teoría matemática de la elasticidad (Timoshenko y Goodier, 1951).

2.2 **Vibraciones de barras y pórticos**

Laura et al., (1988b) han realizado varios experimentos numéricos sobre vibraciones libres y forzadas de vigas no uniformes mientras que Filipich et al. (1988b) han analizado vibraciones de una viga cuyo espesor varía en forma discontinua.

Carnicer et al. (1989) han estudiado el caso de una viga con un apoyo intermedio mientras que otra publicación considera la situación donde la viga es de espesor no uniforme (Laura et al., 1989b).

El problema algo más complejo donde las condiciones de borde contienen los autovalores del problema siendo satisfechas idénticamente, ha sido también tratado (Bambill y Laura, 1989). La determinación de velocidades críticas ha sido también estudiada (Ercoli et al., 1987).

Vibraciones de pórticos en su plano han sido analizadas por Laura y Valerga (1987) y el problema de vibraciones longitudinales de un pilote parcialmente embebido en un suelo ha sido estudiado por Filipich et al. (1988a).

Problemas de vibraciones de arcos han sido considerados por Laura et al. (1988a), Laura y Verniere (1988), Gutierrez et al. (1989) y Rossi et al. (1989).

Diversos problemas de anillos vibrantes han sido estudiados por Laura et al. (1988d,f) Filipich et al. (1989a) y Rosales et al. (1989).

2.3 Vibraciones de membranas

Utilizando el método de transformación conforme Cortínez et al. (1988) han determinado la frecuencia fundamental de vibración de una membrana anular que posee un contorno externo corrugado mientras que el interior es circular. Un enfoque similar ha sido utilizado por Laura y Gutierrez (1992) para estudiar el caso de una membrana romboidal con un orificio concéntrico circular.

3. Optimización del método de Galerkin

Es obvio que al aplicar el método de Galerkin se tiene una situación similar a la que se llega utilizando la metodología de Rayleigh-Ritz. La función error o residual contiene al parámetro de optimización que aparecerá, como es de esperar, en las condiciones de ortogonalidad.

Sea por ejemplo el clásico problema de Graetz gobernado por el sistema diferencial

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy}{dr} + \lambda^2 (1 - r^2)\, y = 0 \qquad (7a)$$

$$y\,(1) = 0 \qquad (7b)$$

Tomando

$$y \cong y_a = \sum_{i=1}^{2} C_i \,(1 - r^{\gamma-1+i}) \qquad (8)$$

y aplicando el método de Galerkin optimizado (Laura y Cortínez, 1986a) se obtienen

$$\lambda_1 = 2.704 \qquad (\gamma_1 = 1.90)$$

$$\lambda_2 = 7.07 \qquad (\gamma_2 = 1.10)$$

El primer autovalor coincide con el exacto mientras que el segundo es un 6% mayor que el correspondiente autovalor determinado en forma exacta.

4. OPTIMIZACION DEL METODO DE KANTOROVICH

El método de reducción a ecuaciones diferenciales ordinarias, de L. V. Kantorovich, ocupa una posición intermedia entre la solución exacta del problema dado y la solución obtenida mediante los métodos de Rayleigh-Ritz y Galerkin. Esto se debe al hecho de que sólo una parte de la expresión utilizada es escogida a priori, el resto es determinado en forma exacta de acuerdo con el caracter del problema (Kantorovich y Krylov, 1964).

Laura y Cortínez demostraron recientemente (1988a) que la precisión del método de Kantorovich puede ser mejorada si se incluye un parámetro de optimización g en la porción de la expresión que es escogida a priori.

Para ilustrar la aplicación se considerará a continuación el problema de vibración transversal de una membrana rectangular gobernado por el sistema diferencial (ver Figura 2)

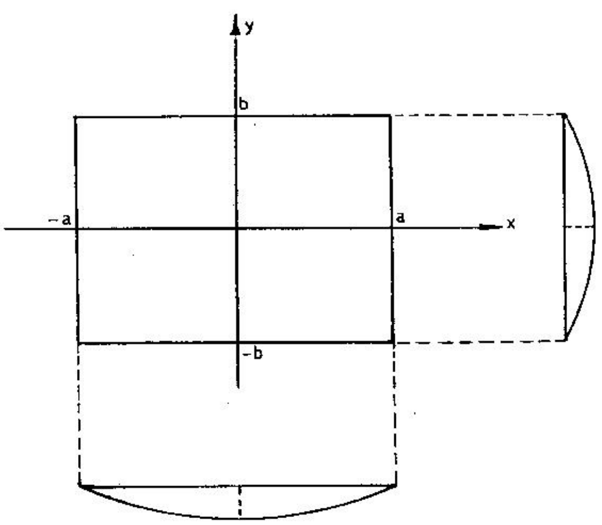

Fig. 2.— Membrana Rectangular Vibrando en Su Modo Fundamental.

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \quad ; \quad u\,[L\,(x,y) = 0] = 0 \qquad (9)$$

Uno toma

$$u \cong u_a = P\,(y,\gamma)\,f(x) \qquad (10\ a)$$

donde

$$P\,(y,\gamma) = 1 - (y/b)^\gamma,\ \gamma > 0 \qquad (10\ b)$$

Dado que se considera un modo simétrico, al efectuar la integración requerida por el método de Kantorovich será efectuada entre 0 y b. Por otra parte la relación (10b) satisface la condición

$$P\,(b,\gamma) = \left.\frac{dP}{dy}\right|_{y=0} = 0 \qquad (11)$$

Sustituyendo a (10b) en la ecuación de Helmholtz se obtiene la función error o residual ϵ (x, y,γ). Aplicando el método de Galerkin se obtiene

$$f''(x) + (\gamma - M)\,f(x) = 0 \qquad (12\ a)$$

donde

$$M = \int_0^b P'^2\,dy \Big/ \int_0^b P^2\,dy = M(\gamma) \qquad (12\ b)$$

La solución de (12a) es

$$f(x) = A\cos\sqrt{\lambda - M}\,x + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda - M}\,x \qquad (13)$$

con las condiciones de borde

$$f(a) = f(-a) = 0 \qquad (14)$$

y dado que f(x) debe ser una función simétrica se deduce que B = 0 Utilizando (14) se obtiene

$$\cos\sqrt{\lambda - M}\ a = 0 \qquad (15)$$

y su raíz menor es

$$\sqrt{\lambda - M}\ a = \pi/2$$

Por consiguiente

$$\lambda a^2 = \pi^2/4 + M(\gamma)a^2$$

Minimizando al autovalor con respecto a g, se obtiene para el caso de una membrana cuadrada (a=b):

$$\lambda a^2 = \pi^2/4 + M(\gamma)a^2$$

Minimizando al autovalor con respecto a γ, se obtiene para el caso de una membrana cuadrada (a = b):

$$\lambda a^2 = 4.942$$

mientras que el valor exacto es $(\lambda a^2)_{ex}$ = 4.9348.

El método de Kantorovich no optimizado da $\lambda a^2 = 4.967$. Por consiguiente el procedimiento optimizado ha mejorado al resultado en un 1%.

El resultado puede ser mejorado aún más (Cortínez y Laura, 1988) introduciendo una función adicional multiplicada por un segundo parámetro de optimización.

El proceso de optimización da excelente precisión en el caso de placas de espesor variable (Bhat et al. 1990; Laura y Cortínez, 1990a; Cortínez y Laura, 1990, 1992a y b y Laura et al. 1991c). Su extensión en problemas tridimensionales ha sido también sugerida (Laura y Cortínez, 1990b).

El método optimizado de Kantorovich ha sido utilizado en la solución de un problema estacionario de calor en dos dimensiones (Laura y Cortínez, 1989a).

5. OPTIMIZACION DE LAS COTAS DE KOHN-KATO

Kohn y Kato desarrollaron, independientemente, una metodología que permite hallar cotas superiores e inferiores en el caso del problema de autovalores

$$M_{2m}\,[\phi] = \lambda\,N_{2n}\,[\phi]\ \text{en D} \qquad (16)$$

$B_i\,[\phi] = 0$, i = 1,2....m en el borde donde
D: dominio finito

M_{2m} y N_{2n}: operadores diferenciales autoadjuntos de orden 2m y 2n respectivamente siendo m>n

siendo N_{2n}: positivo definido.

El método de Kohn - Kato puede ser utilizado en el caso de dominios de geometría complicada si se lo utiliza en forma combinada con el método de transformación conforme.

Por otra parte se ha demostrado que es posible optimizar las cotas, minimizando la cota superior y maximizando la inferior si se introduce el parámetro de optimización de Rayleigh en las funciones coordenadas (Laura y Cortínez, 1986b). También se ha aplicado optimización en el tratamiento de guias de ondas electromagnéticas de sección uniforme y geométricamente complicada (Laura y Cortínez, 1987).

6. OPTIMIZACION DEL METODO DE RAYLEIGH-RITZ CUANDO SE LO APLICA AL RESOLVER ECUACIONES INTEGRALES

Se ha mostrado recientemente que el proceso de optimización tratado en esta reseña posee algunas características ventajosas cuando se lo utiliza en conexión con el procedimiento de Ritz de solución de ecuaciones integrales (Laura y Gutierrez, 1990) y de manera similar: en el método de Galerkin (Laura y Cortínez, 1989c). Se debe admitir que la mayor dificultad estriba en la determinación de la función de Green pero esta situación es inherente a la teoría de ecuaciones integrales (Gutierrez et al. 1990 y Gutierrez y Laura, 1991).

7. OPTIMIZACION DE AUTOVALORES AL UTILIZAR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

El concepto de optimización de Lord Rayleigh fue introducido en formulaciones de elementos finitos por investigadores de los EE. UU. y Argentina trabajando en forma independiente (Newberry et al., 1987 y Laura et al., 1986). La idea básica consiste en incluir un parámetro exponencial γ en las funciones de forma cuando se calculan frecuencias naturales o cargas de pandeo. Luego de haber utilizado una formulación sea del tipo de Ritz o del tipo de Galerkin, se minimiza el autovalor buscado con respecto a γ. La metodología ha sido utilizada también en problemas bidimensionales gobernados por la ecuación de Helmholtz (Utjes et al., 1989).

Otro enfoque alternativo ventajoso es el de introducir un parámetro de optimización C que multiplica a una parte de la función de forma y que permite optimización ulterior de los autovalores (Filipich et al., 1988c).

8. CONCLUSIONES

Los ejemplos y la bibliografía citada demuestran que el concepto de Rayleigh de optimización de autovalores permite obtener, ventajosamente, resultados prácticos en una gama enorme de situaciones.

Si bien permite economía en memoria y tiempo de uso de computadora, en el caso de ser utilizado en códigos de elementos finitos, se necesitan estudios adicionales para llegar a conclusiones definitivas.

9. AGRADECIMIENTOS

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET (PID-BID 1992).

El autor agradece también la colaboración de las Sras. G.M. Ficcadenti y M. S. Grenada en la preparación del manuscrito.

10. REFERENCIAS

AVALOS, D. R., LAURA, P.A.A. y BIANCHI, A. M., (1987) Analytical and experimental investigation on vibrating circular plates with stepped thickness over a concentric circular region, J. Acoust. Soc. Am. 82, pp. 13-16.

AVALOS, D. R., LAURA, P. A. A. y LARRONDO, H., (1988) Vibrating circular plates with stepped thickness over a concentric circular region: a general, approximate solution, J. Acoust. Soc. Am. 84, pp. 1181-1185.

AVALOS, D. R., LAURA P.A.A. y GUTIERREZ, R. H., (1989) On the influence of the Poisson ratio on the natural frequencies of free circular plates, J. Sound Vib. 132, 341-345.

BAMBILL, E. A. y LAURA, P.A.A., (1989) Application of the Rayleigh-Schmidt method when the boundary conditions contain the eigenvalues of the problem, J. Sound Vib. 130, pp. 167-170.

BERT, C.W., (1987) Application of a version of the Rayleigh technique to problems of bars, beams, columns, membranes and plates, J. Sound Vib. 119, pp. 317-326.

BHAT, R.B., LAURA, P.A.A., GUTIERREZ, R. H., CORTINEZ, V. H. y SANZI, H. C., (1990) Numerical experiments on the determination of antural frequencies of transverse vibrations of rectangular plates of non-uniform thickness, J. Sound Vib. 138, pp. 205-219.

CARNICER, R., BERGMANN, A., LAURA, P.A.A. y SANCHEZ SARMIENTO, G., (1989) A note on transverse vibrations of a beam with an intermediate support, elastically restrained against rotation at one end and carrying a guided mass at the other, J. Sound Vib. 129, pp. 356-360.

CORTINEZ, V. H., LAURA, P.A.A., SANZI, H.C. y BERGMAN, A., (1988) Free vibrations of a corrugated membrane with a fixed, inner circulary boundary, J. Sound Vib. 120, pp. 622-625.

CORTINEZ, V. H. y LAURA, P.A.A., (1990) Analysis of vibrating rectangular plates of discontinuously varying thickness by means of the Kantorovich extended method, J. Sound Vib. 137, pp. 457-461.

CORTINEZ, V.H., LAURA P.A.A., BERGMANN, A. y CARNICER, R., (1991) Numerical experiments on a vibrating triangular plate of non-uniform thickness. Applied Acoustics 33, pp. 153-159.

CORTINEZ, V.H. y LAURA, P.A.A., (1992) Vibrations of non-homogeneous rectangular membranes, J. Sound Vib. 156, pp. 217-225.

ERCOLI, L., LAURA, P.A.A., GIL R., CARNICER R. y SANZI, H. C., (1990) Fundamental frequency of vibrations of rectangular plates of discontinuously varying thickness with a free edge: analyticial and experimental results. J. Sound Vib. 141, pp. 221-229.

ERCOLI, L., SONZOGNI, V. E., IDELSOHN, S. y LAURA, P.A.A., (1992) Transverse vibrations of an isotropic, simply supported rectangular plate with orthotropic inclusion, J. Sound Vib. 153, pp. 217-221.

ESHLEMAN, R. L., (1981) The decline of approximate methods its implications for computation, Shock Vib. Dig. 13, p. 2.

FILIPICH, C. P., LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1988a) Longitudinal vibrations of a rod partially embedded in an elastic foundation, Applied Acoustics 23, pp. 273-279.

FILIPICH, C. P., LAURA, P.A.A., SONEMBLUM, M. y GIL, E., (1988b) Transverse vibrations of a stepped beam subject to an axial force and embedded in a non-homogeneous Winkler foundation, J. Sound Vib. 126, pp. 1-8.

FILIPICH, C. P., Jouglard C. y LAURA, P.A.A., (1988b) Transverse vibrations of a stepped beam subject to an axial force and embedded in a non-homogeneous Winkler foundation, J. Sound Vib. 126, pp. 1-8.

FILIPICH, C. P., JOUGLARD, C. y LAURA, P.A.A., (1988c) An optimization of the finite element method and its application to certain ocean engineering problems, Ocean Engineering 15, pp. 237-248.

FILIPICH, C.P., LAURA P.A.A., ROSALES, M. y ROSSI, R.E., (1989a) In-plane flexural vibrations of nonuniform circular rings embedded in Winkler-type foundations, J. Acoust. Soc. Am. 85, pp. 121-126.

FILIPICH, C.P., ERCOLI, L., LAURA, P.A.A., ROSSI, R. E. y HERRERA, H., (1989b) Analytical and experimental investigation on vibrating frames carrying concentrated masses, Applied Acoustics 26, pp. 243-250.

GUTIERREZ, R. H. y LAURA, P.A.A., (1989) In plane vibrations of thin, elastic rectangular plates elastically restrained against translation along the edges, J. Sound Vib. 132, pp. 512-515.

GUTIERREZ, R. H., LAURA, P.A.A., ROSSI, R.E., BERTERO, R. y VILLAGGI, A., (1989) In-plane vibrations of non-circular arcs of non uniform cross section, J. Sound and Vib. 129, pp. 181-200.

GUTIERREZ, R.H., LAURA, P.A.A. y ROSSI, R.E., (1880a) Fundamental frequency of beams of nonuniform cross section by means of the integral equation approach and Rayleigh's optimization suggestion, J. Acoust. Soc. Am. 88, pp. 1468-1471.

GUTIERREZ, R. H., LAURA, P.A.A., BERGMANN, A. y CARNICER, R., (1990b) Vibrations of stepped elliptical plates, J. Sound Vib. 140, pp. 523-527.

GUTIERREZ, R. H. , y LAURA, P.A.A., (1991) Analysis of transverse vibrations of a composite membrane using the integral equation method and Rayleigh's optimization suggestion, J. Sound vib. 47, pp. 515-518.

KANTOROVICH, L.V. y KRYLOV, V. L., (1964) Approximate methods of higher analysis. Interscience Publishers: New York, Groningen Noordhoff.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1986a) Optimization of eigenvalues when using the Galerkin method, J. Am. Inst. Chem. Engineers 32, pp. 1025-1026.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1986b) Optimization of the Kohn-Kato enclosure theorem: application to vibrations problems, J. Acous. Soc. Am. 80, pp. 1086-1090.

LAURA, P.A.A., UTJES, J.C. y SANCHEZ SARMIENTO, G., (1986) Non-linear optimization of the shape functions when applying the finite element method to vibration problems, J. Sound Vib. 111, pp. 219-228.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1987) Cutoff frequencies of waveguides of arbitrary cross section: optimization of Kohn-Kato bounds. IEE Preceedings 134, pp. 226-228.

LAURA, P.A.A., FILIPICH, C. P. y CORTINEZ, V. H., (1987a) In-plane vibrations of an elastically cantilevered circular arc with a tip mass, J. Sound Vib. 115, pp. 437-446.

LAURA, P.A.A. y VALERGA, B. H., (1987) In-plane vibrations of frames carrying concentrated masses, J. Sound Vib. 117, pp. 447-458.

LAURA, P.A.A., LA MALFA, S., ERCOLI, L. y CORTINEZ, V. H., (1987b) Whirling of flexible shafts with intermediate supports, Applied Acoustics 21, pp. 259-266.

LAURA, P.A.A., VERNIERE, P.L., CARNICER, R. y BERTERO, R., (1988a) A note on vibrations of a circumferential arch with thickness varying in a discontinuous fashion, J. Sound Vib. 120, pp. 95-105.

LAURA, P.A.A., VALERGA, B. H., UTJES, J. C. Y CARNICER, R., (1988b) Numerical experiments on free and forced vibrations of beams of non-uniform cross section, J. Sound Vib. 120, pp. 587-595.

LAURA, P.A.A., ROSSI, R. E. y BAMBILL, D. V., (1988e) Dynamic analysis of leaflet stresses and application to heart valve design, J. Biomedical Eng. 10, pp. 453-458.

LAURA, P.A.A., BAMBILL E. A., FILIPICH, C. P. y ROSSI, R. E., (1988d) A note on free flexural vibrations of a non-uniform elliptical ring in its plane, J. Sound Vib. 126, pp. 249-254.

LAURA, P.A.A., FICCADENTI, G. M. y ALVAREZ, S.

I., (1988e) Effect of geometric boundary perturbations on the natural frequencies and buckling loads of clamped circular plates, J. Sound vib. 126, pp. 67-72.

LAURA, P.A.A., FILIPICH, C. P., ROSSI, R. E. y REYES, J. A., 81988f) Vibrations of rings of variable cross section, Applied Acoustics 25, pp. 225-234.

LAURA, P.A.A. y VERNIERE, P. L., (1988) A note on in-plane vibrations of arch-type structures of non-uniform cross-section: the case of linearly varying thickness, J. Sound Vib. 124, pp. 1-12.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1988a) Optimization of the Kantorovich method when solving eigenvalue problems, J. Sound Vib. 122, pp. 396-398.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1988b) Rayleigh's and Galerkin's methods: use of a variable parameter as a multiplier versus minimization with respect to an exponential parameter, J. Sound Vib. 124, pp. 388-389.

LAURA, P.A.A., ROSSI, R. E. y VERNIERE, P.L., (1989a) In-plane vibrations of noncircular arcs rigidly clamped at one end and with an intermediate support, J. Acoust. Soc. Am. 85, pp. 814-818.

LAURA, P.A.A., PALOTO, J. C., SANTOS, R.D. y CARNICER, R., (1989b) Vibrations of non-uniform beam elastically restrained against rotation at one end and carrying a guided mass at the other, J. Sound Vib. 129, pp. 513-516.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1989a) An extension of the Kantorovich method and its application to a steady state heat conduction problem, Int. J. Heat Mass Transfer 32, pp. 611-613.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1989b) Use of exponential coordinate functions containing an optimization parameter when solving mechanical vibrations, J. Sound Vib. 129, pp. 520-522.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1989c) Optimization of the Galerkin method when applied to the approximate solution of integral equations, J. Sound Vib. 135, pp. 509-510.

LAURA, P.A.A., (1989) The computer age and traditional approximate analytical methods, The Shock and Vibration Digest 21, pp. 3-6.

LAURA, P.A.A., AVALOS, D. R. y LARRONDO, H.A., (1990) Forced vibrations of circular, stepped plates, J. Sound Vib. 136, pp. 146-150.

LAURA, P.A.A., y GUTIERREZ, R. H., (1990) Rayleigh's optimization approach for the approximate solution of integral equations for vibration problems, J. Sound Vib. 139, pp. 63-70.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1990a) Analysis of vibrating plates of non uniform thickness by means of the optimized Kantorovich method, The Journal of Ind. Math. Soc. 40, 125-132.

LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V. H., (1990b) Application of the optimized Kantorovich method to three dimensional eigenvalue problems, J. Sound vib. 140, pp. 528-531.

LAURA, P.A.A., GUTIERREZ, R. H., BERMANN, A., CARNICER, R. y SANZI, H. C., (1991a) Vibrations of circular plates with discontinuous variation of the thickness in a non-concentric fashion, J. Sound Vib. 144, pp. 1-8.

LAURA, P.A.A., GUTIERREZ, R. H., CARNICER, R. y SANZI, H. C., (1991b) Free vibrations of a solid circular plate of linearly varying thickness and attached to a Winkler foundation, J. Sound Vib. 144, pp. 149-161.

LAURA, P.A.A. y GUTIERREZ, R. H., (1991) A note on vibrating triangular equilateral plates subject to a hydrostatic state of in-plane stress, J. Sound Vib. 149, pp. 513-515.

LAURA, P.A.A., LARRONDO, H.A., CORTINEZ, V. H., y AVALOS, D. R., (1991c) Transverse vibrations of rectangular plates of non-uniform thickness subjected to uniform state of in-plane stress, J. Sound Vib. 151, pp. 175-180.

LAURA, P.A.A. y GUTIERREZ, R. H. (1992) Determination of the fundamental frequency of a rhombic membrane with a concentric circular hole, J. Sound Vib. 153, pp. 176-179.

MAURIZI, M.J., LAURA, P.A.A., BAMBILL, D.V. y ROSSIT, C.A., (1990) Vibrating circular plate carrying a concentrated mass: Comparison of results, J. Sound Vib. 138, pp. 335-336.

NEWBERRY, A. L., BERT, C. W. y STRIZ, A. G., (1987) Non integer-polynomial finite element analysis of column buckling, J. Structural Eng. (ASCE) 113, pp. 873-878.

PAULING, L. y BRIGHT WILSON, E., (1935) Introduction to quantum mechanics with applications to chemistry, Mc Graw-Hill, New York.

ROSALES, M. B., FILIPICH, C. P. y LAURA, P.A.A., (1989) A note on free flexural vibrations of a non uniform ring with fixed supports, J. Sound Vib. 129, pp. 201-213.

SANZI, H.C., LAURA, P.A.A y CORTINEZ, V. H. (1988) Fundamental frequency of vibration of a circular plate with concentric circular supports, J. Sound Vib. 122, pp. 393-395.

SANZI, H. C., LAURA, P.A.A. y VALERGA, B. H., (1988) Numerical experiments on the determination of the fundamental frequency of transverse vibration of non uniform rectangular plates, J. Sound Vib. 123, pp. 382-386.

SHECHTER, R. S., (1967) The variational method in engineering, Mc Graw Hill: New York pp. 112.

SONEMBLUM, M., GIL, E., LAURA, P.A.A., Filipich, C.P., Bergmann, A. y Sanzi, H.C., (1989) A note on vibrations of elliptical plates carrying concentric concentrated masses. Applied Acoustics 28, pp. 513-522.

STODOLA, A., (1927) Steam and gas turbines (translation of the German edition), Mc Graw Hill, New York. See p. 1145.

STRUTT, J. W. (LORD RAYLEIGH) Theory of sound, Vol. I, second edition Macmillan, London. Reprinted: (1945) Dover, New York, See pp. 112-113.

TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J. N., (1951) Theory of Elasticity, Mc Graw Hill, New York, See pp. 285.4.

UTJES, J. C., SANCHEZ SARMIENTO G., SANZI, H.C. y LAURA, P.A.A., (1989) Non-linear optimization of the shape function when solving the 2-D helmholtz equation by means of the finite element method, J. Sound Vib. 35, pp. 21-35.

Manuscrito recibido en Marzo de 1993