Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. Nat., Buenos Aires, tomo 45, 1993

ECONOMIAS DISTRIBUCIONALES Y EQUILIBRIO SOCIAL

por Julio H. G. Olivera

Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

ABSTRACT

This paper shows the existence of social equilibrium in economies where the choice sets are spaces of generalized functions (Schwartz's distributions). The result implies a considerable extension of the theory of social equilibrium.

RESUMEN

Este trabajo demuestra la existencia de equilibrio social en economías donde los conjuntos de elección son espacios de funciones generalizadas (distribuciones de Schwartz). El resultado implica una considerable extensión de la teoría del equilibrio social.

Introducción

En su obra clásica sobre comercio y bienestar, James Meade distingue entre ajustes marginales y ajustes estructurales. Los primeros alteran poco la situación previa de la economía. Los segundos, por el contrario, entrañan una transformación sustancial del estado de cosas preexistente (Meade, 1964, página 6).

La realidad económica ofrece ejemplos de las dos clases de ajuste. El desarrollo económico, en particular, incluye procesos graduales asociados con cambios bruscos y trayectorias discontinuas. Los ajustes marginales predominan en períodos breves, pero a largo plazo los ajustes estructurales son la fuerza motriz que impulsa la expansión.

Las funciones generalizadas o distribuciones permiten tener en cuenta ambos tipos de ajuste sin renunciar a las ventajas técnicas de la diferenciabilidad, pues poseen derivadas sucesivas de todos los órdenes. Por ello constituyen el instrumento matemático apropiado para describir las actividades económicas como funciones del tiempo.

Esa circunstancia nos decidió hace una década a iniciar la aplicación sistemática de las distribuciones en el estudio de los problemas económicos. Desde entonces hemos explorado con métodos distribucionales un vasto territorio de la teoría económica: conjuntos de producción (1984, 1986), conjuntos de consumo (1988) y relaciones de mercado (1990a y b). Nos proponemos abordar en los párrafos que siguen el tema de la existencia de equilibrio social, noción que comprende tanto las operaciones de mercado de los agentes económicos como sus estrategias no mercantiles.

Definiciones

Sean dos espacios topológicos X e Y. Una *correspondencia* $F: X \to Y$ es una aplicación de punto a conjunto con valor no vacío para todo $x \in X$.

La correspondencia $F: X \to Y$ es *semicontinua superiormente* si el conjunto

$$\{x \in X: F(x) \subset V\}$$

es abierto en X para todo subconjunto abierto V de Y.

La correspondencia $F: X \to Y$ tiene *secciones inferiores abiertas* si el conjunto

$$\{x \in X: y \in F(x)\}$$

es abierto en X para cada $y \in Y$.

Una función $f(x, y): X \times X \to R \cup \{\pm\infty\}$ es *0-diagonalmente cuasi cóncava en y* si para cualquier conjunto $\{y_1,...,y_m\} \subset X$ y cualquier y_C contenido en la cápsula convexa de $\{y_1,...,y_m\}$ se cumple la condición

$$\min_j f(y_C, y_j) \leq 0, \; j = 1,...,m.$$

Una función $f(x, y): X \times X \to R \cup \{\pm\infty\}$ es *0-diagonalmente cuasi convexa en y* si $-f(x, y)$ es 0-diagonalmente cuasi cóncava en y (conf. Zhou y Chen, 1988).

Escribiremos $\bar{A}$ y coA para indicar la clausura topológica y la cápsula convexa, respectivamente, del conjunto A. Denotaremos con $\bar{F}$ la correspondencia definida por

$$\bar{F}(x) = \overline{F(x)}.$$

Pasando ahora a los términos económicos, el *conjunto de agentes* es un conjunto numerable I. Con cada $i \in I$ asociamos X_i, un conjunto no vacío. Sea $X = \Pi_{i \in I} X_i$. Una *economía* Γ es una colección de ternas ordenadas (X_i, A_i, P_i), donde A_i, P_i designan correspondencias de X en X_i.

Un *equilibrio social* de Γ es un elemento $x^* \in X$ tal que, para cada $i \in I$, valen

1) $x_i^* \in \bar{A}_i(x^*)$,
2) $P_i(x^*) \cap A_i(x^*) = \varnothing$.

La interpretación económica es esta: X_i, conjunto de acciones técnicamente posibles para i; A_i, subconjunto de acciones económicamente factibles para i; P_i, subconjunto de acciones estrictamente preferidas por i; x_i^*, acción óptima para i, en el sentido de que i no dispone de ninguna alternativa preferida y factible.

Cuando existe una representación numérica de las preferencias, puede hacerse una caracterización distinta pero equivalente del equilibrio social. Sea una función

$$u_i: X \to [-\infty, \infty]$$

tal que

$$u_i(y) > u_i(x) \text{ si y sólo si } y \in P_i(x).$$

Agregamos los siguientes símbolos:

$$A = \Pi_{i \in I} A_i,$$
$$X_{-j} = \Pi_{i \in I \setminus \{j\}} X_i,$$
$$x_{-j} \in X_{-j}.$$

En estos términos una *economía* Γ es una colección de ternas ordenadas (X_i, A_i, u_i) y un *equilibrio social* de Γ es un elemento $x^* \in X$ que satisface los requisitos:

1) $x_i^* \in \bar{A}_i(x^*)$,
2) $u_i(x^*) \geq u_i(x^*_{-i}, x_i)$,

para todo $x_i \in \bar{A}_i(x^*)$ y cada $i \in I$.

El concepto de equilibrio social que acabamos de describir procede de Borglin y Keiding (1976).

Teorema de existencia

Nuestro objetivo es probar la existencia de equilibrio social con relación a economías en las cuales cada conjunto X_i, $i \in I$, es un espacio de funciones generalizadas (distribuciones de Schwartz). Veremos que se llega a esa conclusión utilizando hipótesis que son enteramente normales desde el punto de vista de la teoría moderna del equilibrio económico. Matemáticamente el argumento se funda en la densidad de las funciones diferenciables como subconjunto de los espacios de distribuciones.

LEMA 1. Sea $\Gamma = \{X_i, A_i, P_i)\}_{i \in I}$ una economía donde, para cada i,

a) X_i es un subconjunto no vacío, compacto, convexo y metrizable de un espacio vectorial topológico localmente convexo;
b) $A_i(x)$ es convexo para todo $x \in X$;
c) $\bar{A}_i$ es semicontinua superiormente;
d) A_i y P_i tienen secciones inferiores abiertas;
e) $x_i \notin coP_i(x)$ para todo $x \in X$.

En tal caso, Γ posee un equilibrio social.

Demostración: v. Yannelis y Prabhakar (1983).

Sobre esta base formulamos ahora el enunciado central del presente artículo:

TEOREMA 1. Sea $\Gamma = \{(X_i, A_i, P_i)\}_{i \in I}$ una economía donde, para cada i,

a) X_i es un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo del espacio de distribuciones D';
b) todo $x_i \in X_i$ tiene soporte contenido en un intervalo finito K_i;

c) se varifican las hipótesis b-e del lema 1;

d) $A_i(x)$ tiene interior no vacío para todo $x \in X$;

e) $P_i(x)$ es abierto para todo $x \in X$.

En tal caso, Γ posee un equilibrio social.

Demostración: Sea D_{K_i} el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte K_i. Consideremos por un instante la economía Γ_D que se obtiene de Γ sustituyendo cada conjunto X_i por $X_i \cap D_{K_i}$. La economía Γ_D presenta todas las características especificadas en el lema l. Se deduce de ello que Γ_D tiene un equilibrio social x^*. Supongamos que x^* no sea un equilibrio social respecto de la economía originaria Γ. Debe haber entonces una distribución $T \in P_i(x^*) \cap A_i(x^*)$ para algún agente i. En virtud de las hipótesis c, d y e, la intersección de $P_i(x^*)$ con $A_i(x^*)$ contiene un abierto $V \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe en $P_i(x^*) \cap A_i(x^*)$ un elemento de D_{K_i}. Pero esto excluye que x^* sea un equilibrio social respecto de Γ_D.

Observación 1. La prueba anterior se apoya sobre la densidad del espacio D en D' (Schwartz, 1966, página 75). Las hipótesis que el teorema agrega a las condiciones del lema l son usuales en el análisis económico (ver, por ejemplo, Nikaido, 1968, páginas 239 y 253).

Observación 2. Siendo D' un espacio de Montel, la cláusula "cerrado y acotado" puede reemplazarse por "compacto" en el enunciado del teorema. La locución empleada resulta más significativa, sin embargo, desde el punto de vista económico. El problema de la acción racional no se plantearía si los recursos fueran ilimitados.

Formulación alternativa

Supongamos que las preferencias pueden representarse numéricamente. Introducimos la función $U_i : X \times X \rightarrow [-\infty, \infty]$ definida por la regla:

$$U_i(x, y) = u_i(x) - u_i(x_{-i}, y_i).$$

De tal manera,

$$P_i(x) = \{y_i \in X_i \,.\, U_i(x, y) < 0\}.$$

Por consiguiente, P_i tiene secciones inferiores abiertas si y solo si los conjuntos

$$\{x \in X;\ U_i(x, y) < 0\}$$

son abiertos para cada $y \in X$. Menos obvia es la siguiente proposición.

LEMA 2. Las propiedades:

a) U_i es 0-diagonalmente cuasi convexa en y,

b) $x_i \notin coP_i(x)$,

son equivalentes.

Demostración: a $\Rightarrow$ b: Tian, 1992, página 383. b $\Rightarrow$ a: En efecto, si U_i no fuera 0-diagonalmente cuasi convexa tendríamos

$$\max_j U_i(y_C, y_j) < 0,$$

es decir

$$\max_j (u_i(y_C) - u_i((y_C)_{-i}, (y_j)_i) < 0,$$

$j = 1,...,m$. Por lo tanto,

$$u_i(y_C) < u_i((y_C)_{-i}, (y_j)_i)$$

para todo j. De tal modo,

$$(y_j)_i \in P_i(y_C)$$

para cada $j=1,...,m$. Luego

$$(y_C)_i \in coP_i(y_C),$$

en contradicción con la premisa.

Observación 3. Dado que $x_i \notin P_i(x)$, la hipótesis usual de "convexidad de las preferencias" (e.g. Nikaido, 1968, página 241) basta para asegurar las propiedades cuya equivalencia establece este lema.

TEOREMA 2. Sea $\Gamma = \{(X_i, A_i, u_i)\}_{i \in I}$ una economía donde, para cada i,

a) X_i es un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo del espacio de distribuciones D';

b) todo $x_i \in X_i$ posee soporte contenido en un intervalo finito K_i;

c) $A_i(x)$ es convexo y tiene interior no vacío para todo $x \in X$;

d) A_i es semicontinua superiormente;

e) A_i tiene secciones inferiores abiertas;

f) los conjuntos $\{x \in X: U_i(x, y) > 0\}$, $\{x \in X: U_i(x, y) < 0\}$, son abiertos para cada $y \in X$;

g) U_i es 0-diagonalmente cuasi convexa en y.

En tal caso, Γ posee un equilibrio social.
Demostración: El resultado surge inmediatamente del lema 2 y del teorema 1.

Equilibrio social y equilibrio de mercado

La verificación de la existencia de equilibrio social en economías distribucionales resulta complementaria de nuestras indagaciones anteriores respecto al equilibrio de mercado en esos sistemas. Sólo si los agentes económicos se reducen a los agentes de mercado, y si las vías de acción empleadas por ellos se limitan a las transacciones mercantiles, el equilibrio social y el equilibrio de mercado coinciden necesariamente.

REFERENCIAS

BORGLIN, A. y H. KEIDING, 1976. Existence of equilibrium actions and of equilibrium: A note on the 'new' existence theorems, Journal of Mathematical Economics 3, 313-316.

MEADE, J., 1968. Trade and welfare, Londres.

NIKAIDO, H., 1968. Convex structures and economic theory, N. York.

OLIVERA, J. H. G., 1984. Producción y tiempo: teoría distribucional, Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 36, 93-95.

OLIVERA, J. H. G., 1986. Conjuntos de producción distribucionales, Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 38, 49-56.

OLIVERA, J. H. G. 1988. Conjuntos de consumo distibucionales, Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 40, 213-216.

OLIVERA, J. H. G. 1990a. Economías distribucionales, Revista de la Unión Matemática Argentina 35, 105-109.

OLIVERA, J. H. G. 1990b. Economías distribucionales y puntos fijos grassmannianos, Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 42, 141-142.

SCHWARTZ, L., 1966. Théorie des distributions, París.

TIAN, G., 1992. Existence of equilibrium in abstract economies with discontinuous payoffs and non-compact choice spaces, Journal of Mathematical Economics 21, 379-388.

YANNELIS, N. C. y N. D. Prabhakar, 1983. Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces, Journal of Mathematical Economics 12, 233-245.

ZHOU, J. X. y G. CHEN, 1988. Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications 132, 213-225.

Manuscrito recibido en Noviembre 1993