

SOBRE LA SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

por Roberto L. V. González

CONICET, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina.

RESUMEN

Se analiza aquí una metodología de resolución numérica de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada a problemas de control óptimo determinísticos con horizonte infinito. Se consideran discretizaciones en tiempo por diferencias finitas y en espacio con elementos finitos. Se estudia fundamentalmente la velocidad de convergencia de los métodos presentados y se dan estimaciones explícitas de los errores de aproximación. Asimismo, se muestran ejemplos que prueban la optimalidad de las cotas dadas.

ABSTRACT

We consider here the Hamilton-Jacobi-Bellman equation associated to an infinite horizon optimal deterministic control problem and we analyze the numerical solutions by discretization on time and spacial variables. We study the rate of convergence of the approximate solution to the optimal cost function of the original problem and we give explicit estimates of the rate of convergence. In addition, we present some examples which show that these estimates are optimal.

INTRODUCCION

En esta exposición reseñaremos algunos resultados obtenidos recientemente en el campo de la solución numérica de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman. Analizaremos fundamentalmente los publicados en [17] [19]; en especial, la cuestión del orden de convergencia de los métodos numéricos allí presentados.

Las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, conocidas como las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman, provienen de problemas de optimización de sistemas dinámicos. Como en base a estas soluciones es posible construir políticas sub-óptimas en feedback, cuestión importante desde el punto de vista práctico, interesa por lo tanto disponer de métodos numéricos para deter-

minar en forma aproximada estas soluciones.

El estudio se restringe aquí al tratamiento de ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman asociadas a la optimización de sistemas dinámicos cuya evolución está gobernada por ecuaciones diferenciales ordinarias.

El objetivo central de estos desarrollos fue determinar los órdenes de convergencia de las aproximaciones y obtener acotaciones a priori de los errores de discretización.

En I, se introduce el problema de control óptimo y la caracterización de la función de costo óptimo como la única solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada a este tipo de problemas.

En II, se considera la solución aproximada de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman por discretización en tiempo.

En base a técnicas del análisis convexo [26], se obtienen estimaciones de la veloci-

Conferencia pronunciada durante la entrega del Premio "Alberto González Domínguez" 1988-1990, el día 22 de noviembre de 1991.

dad de convergencia, que en algunos aspectos son más ajustadas que las obtenidas en la presentación del método hecha en [2], [3].

En III, se considera la solución totalmente discretizada de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman y se analiza el establecimiento de acotaciones críticas de los errores de discretización, así como los problemas de optimización de los parámetros de discretización. A través de contraejemplos, se comprueba que las estimaciones establecidas dan los límites de precisión de esta metodología de resolución.

I. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Describiremos aquí el problema cuya solución numérica será tratada en II y III.

I.1 El problema con horizonte infinito

I.1.1 La función de costo óptimo

El objetivo final de los desarrollos aquí tratados es encontrar o calcular aproximadamente la función de costo óptimo u , asociada a la optimización de un sistema dinámico controlado.

Esta función se define:

$$u(x) = \inf_{\alpha(\cdot) \in A} J(x, \alpha(\cdot)) \quad (1)$$

donde

$$J(x, \alpha(\cdot)) = \int_0^{\infty} f(y(s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds \quad (2)$$

y A es el conjunto de funciones admisibles de control $\alpha(\cdot)$, estas funciones son funciones medibles definidas en el intervalo $[0, \infty)$, con valores en un compacto $A \subset \mathfrak{R}^m$.

La función f representa el costo instantáneo y $\lambda > 0$, es el factor de descuento.

El sistema bajo control está identificado por su estado $y \in \mathfrak{R}^n$, que a su vez evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{y}(s) = g(y(s), \alpha(s)), s > 0, \quad (3)$$

siendo las condiciones iniciales:

$$y(0) = x \in \Omega \subset \mathfrak{R}^n. \quad (4)$$

Se supone siempre que para toda política de control, la correspondiente evolución $y(\cdot)$ está enteramente contenida en Ω .

I.1.2 Propiedades de la función de costo óptimo u

Regularidad

Cuando los datos del problema son lipschitzianos y acotados, la función u es hölderiana y acotada. Específicamente tenemos:

Proposición I.1: Si se verifican las siguientes hipótesis $\forall x, \hat{x} \in \Omega, \alpha \in A$:

$$\|g(x, \alpha) - g(\hat{x}, \alpha)\| \leq L_g \|x - \hat{x}\| \quad (5)$$

$$\|g(x, \alpha)\| \leq M_g \quad (6)$$

$$|f(x, \alpha) - f(\hat{x}, \alpha)| \leq L_f \|x - \hat{x}\| \quad (7)$$

$$|f(x, \alpha)| \leq M_f \quad (8)$$

entonces, $\forall x, \hat{x} \in \Omega$

$$|u(x)| \leq \frac{M_f}{\lambda} \quad (9)$$

$$|u(x) - u(\hat{x})| \leq C \|x - \hat{x}\|^\gamma \quad (10)$$

donde C es una constante que depende de los datos del problema.

Nota: La demostración es clásica (ver [2], [9], [10], [12], [13]).

I.1.3 La ecuación estacionaria de Hamilton-Jacobi-Bellman

Utilizando las técnicas de la programación dinámica, puede probarse que la función de costo óptimo es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada:

$$\min_{\alpha \in A} \left\{ -\lambda u + \sum_{i=1}^n g_i(\alpha) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(\alpha) \right\} = 0 \quad (11)$$

en el sentido de viscosidad. La solución de viscosidad está definida de la siguiente forma (ver [5], [6], [21]):

Una función u se dice una solución de viscosidad de la ecuación (11), si para toda función $\phi \in C^1(\Omega)$ se verifica que:

(i) Si $u - \phi$ tiene un máximo local en x_0 , entonces:

$$\min_{\alpha \in A} \left\{ -\lambda u + \sum_{i=1}^n g_i(\alpha) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + f(\alpha) \right\} \geq 0, \text{ en } x_0. \quad (12)$$

(ii) Si $u - \phi$ tiene un mínimo local en x_1 , entonces:

$$\min_{\alpha \in A} \left\{ -\lambda u + \sum_{i=1}^n g_i(\alpha) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + f(\alpha) \right\} \leq 0, \text{ en } x_1. \quad (13)$$

Nota: Dado que la solución de viscosidad es única (ver [5], [6]), se tiene que la determinación de u se reduce a encontrar la única solución continua de (11).

1.2 El problema con horizonte finito

1.2.1 La función de costo óptimo para el caso de horizonte finito

Si el tiempo de evolución se limita a un valor finito T , se debe considerar el funcional:

$$J_T(t, x, \alpha(\cdot)) = \int_t^T f(y(x, s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds \quad (14)$$

La correspondiente función de costo óptimo se define, naturalmente:

$$u_T(t, x) = \inf_{\alpha(\cdot) \in A_T} J_T(t, x, \alpha(\cdot)) \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \Omega \quad (15)$$

siendo A_T el conjunto de las funciones medibles $\alpha(\cdot): [0, T] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^m$ y donde $y(x, \cdot)$ es la solución de la ecuación (3) con condiciones iniciales:

$$y(x, t) = x \quad (16)$$

1.2.2 Propiedades de la función de costo óptimo u_T

Regularidad

En este caso bajo las mismas condiciones (5) (8), puede probarse que u_T es acotada y lipschitziana, estrictamente se tiene:

Proposición 1.2: Si (5) (8) son válidas, entonces:

$$|u_T(t, x)| \leq C \quad (17)$$

$$|u_T(t, x) - u_T(t, \hat{x})| \leq C |e^{(\lambda g - \lambda)(T-t)} - 1| \cdot \|\hat{x} - x\| \quad (18)$$

$$|u_T(t, x) - u_T(\hat{t}, x)| \leq C |e^{(\lambda g - \lambda)(T-t)} - 1| \cdot |t - \hat{t}| \quad (19)$$

donde C es una constante que depende de los datos del problema.

1.2.3 La ecuación evolutiva de Hamilton-Jacobi-Bellman

Para el caso de horizonte finito, la función de costo óptimo u_T es la única solución de viscosidad de la siguiente ecuación evolutiva de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\min_{\alpha \in A} \left\{ \frac{\partial u_T}{\partial t} - \lambda u_T + \sum_{i=1}^n g_i(\alpha) \frac{\partial u_T}{\partial x_i} + f(\alpha) \right\} = 0 \quad (20)$$

con condiciones finales

$$u_T(T, x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (21)$$

Para (20), la solución de viscosidad se define en forma similar a lo hecho en 1.1.3:

Una función u_T se dice una solución de viscosidad de la ecuación (20), si para toda función $\phi \in C^1((0, T) \times \Omega)$ se verifica que:

(i) Si $u_T - \phi$ tiene un máximo local en (t_0, x_0) , entonces:

$$\min_{\alpha \in A} \left\{ -\lambda u_T + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n g_i(\alpha) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + f(\alpha) \right\} \geq 0, \text{ en } (t_0, x_0). \quad (22)$$

(ii) Si $u_T - \phi$ tiene un mínimo local en (t_1, x_1) entonces:

$$\min_{\alpha \in A} \left\{ -\lambda u_T + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n g_i(\alpha) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + f(\alpha) \right\} \leq 0, \quad \text{en } (t_1, x_1). \quad (23)$$

Nota: Tanto (11) como (20) son en general imposibles de solucionar analíticamente, por lo que es necesario desarrollar métodos numéricos como los que analizaremos en II y III. En [7], [8], [24], [25], [28] pueden verse otros enfoques de este problema. Los resultados aquí analizados están más ligados a los métodos usados en [2], [3], [8], [12], [13] y reposan en la utilización de esquemas de discretización de las derivadas parciales que verifican un principio de máximo discreto [4].

II. SOLUCION NUMERICA POR APROXIMACION EN TIEMPO DISCRETO

Se presenta aquí una discretización en el tiempo de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (11) y se analizan las propiedades verificadas por las familias de funciones de aproximación u^h , así como las estimaciones explícitas de la velocidad de convergencia de estas aproximaciones a la solución de viscosidad del problema original. Se analiza fundamentalmente el hecho de que al introducir una discretización en tiempo, se produce un empobrecimiento del espacio de controles admisibles, con lo que controles complicados no pueden ser perseguidos con precisión. Es esto lo que provoca la aparición de una velocidad de convergencia de tipo $\sqrt{h}$ en contraste con el método de Euler habitual, que es de orden h .

Los resultados principales son los siguientes:

- Usando técnicas de análisis convexo se obtiene, para el problema con horizonte finito, una estimación del error del tipo:

$$| u_T(t, x) - u_T^h(t, x) | \leq M \phi(T - t) h^{1/2} \quad (24)$$

y del tipo

$$| u_T(t, x) - u_T^h(t, x) | \leq M \psi(T - t) h \quad (25)$$

cuando se cumplen condiciones adicionales de semiconcavidad para las funciones f y g .

- Utilizando las estimaciones (24) y (25), se obtiene para el problema con horizonte infinito, la estimación (26), válida para el caso general; y la estimación (27), válida para el caso en que se suponen hipótesis de semiconcavidad:

$$| u(x) - u^h(x) | \leq C h^{(\gamma/2) \wedge (1/2)} \quad (26)$$

$$| u(x) - u^h(x) | \leq C h^{1 \wedge (\gamma/2)} \quad (27)$$

γ es una constante y ϕ, ψ son funciones que dependen de los datos del problema y no del parámetro h de discretización.

Observaciones

Similares estimaciones han sido obtenidas por Capuzzo Dolcetta-Ishii en [3], utilizando técnicas asociadas a la teoría de soluciones de viscosidad [5], [6], [21], [22].

Las principales diferencias entre ellas y los resultados aquí analizados, es el uso de técnicas de análisis convexo como medio para probar las estimaciones (24) y (25) y el hecho que las estimaciones obtenidas para el caso con semiconcavidad mejoran (en el conjunto $1 < \gamma < 2$) las obtenidas en [3].

II.1 Aproximación del problema con horizonte infinito

II.1.1. Un esquema de discretización temporal

Se considera en $C(\Omega)$ la solución u^h de la ecuación funcional siguiente:

$$u^h(x) = \min_{\alpha \in A} ((1 - \lambda h) u^h(x + hg(x, \alpha)) + hf(x, \alpha)) \quad \forall x \in \Omega \quad (28)$$

que es una versión natural de la discretización de Euler de la ecuación (11).

Si se considera que: $\forall x \in \Omega, \forall a \in A$,

$$\forall h \leq h_0 = \frac{1}{\lambda}$$

$$x + hg(x, a) \in \Omega, \quad (29)$$

entonces, $\forall h \leq h_0$, el operador A^h está bien definido.

$$A^h: C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$$

$$(A^h w)(x) = \min_{a \in A} ((1 - \lambda h) w(x + hg(x, a)) + hf(x, a)) \quad (30)$$

Si denotamos

$$A_a^h: C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$$

$$(A_a^h w)(x) = (1 - \lambda h) w(x + hg(x, a)) + hf(x, a),$$

entonces puede denotarse en forma compacta:

$$(A^h w)(x) = \min_{a \in A} (A_a^h w)(x)$$

y la ecuación (28) deviene:

$$u^h = A^h u^h \quad (31)$$

Nota: Es claro observar que A^h es un operador contractivo en $B(\Omega)$ (el espacio de las funciones acotadas en Ω) y por lo tanto, la ecuación (31) tiene en $B(\Omega)$, una única solución que denotamos u^h . En II.1.2 se analizan otras propiedades de regularidad de u^h .

II.1.2 Propiedades de la función u^h

Las funciones u^h , tales como la función u a la que aproximan, son acotadas y hólderianas, es decir:

Proposición II.1: Si (5)-(8) son válidas, entonces

$$|u^h(x)| < \frac{M_f}{\lambda} \quad (32)$$

$$|u^h(x) - u^h(\hat{x})| \leq C \|x - \hat{x}\|^\gamma \quad (33)$$

siendo C una constante que depende de los datos del problema y $\gamma = \min(\lambda/Lg, 1)$.

Interpretación

La función u^h es la función de costo óptimo del problema de optimización siguiente:

$$u^h(x) = \min_{\alpha(.) \in A^h} J^h(x, \alpha(.)), \quad (34)$$

siendo

$$J^h(x, \alpha(.)) = \sum_{j=0}^{\infty} h \cdot f(y_h(x, j), \alpha(jh)) (1 - \lambda h)^j, \quad (35)$$

y donde el vector y_h representa al sistema de tiempo discreto que evoluciona de acuerdo a la ley:

$$y_h(x, j+1) = y_h(x, j) + hg(y_h(x, j), \alpha(jh)), j = 0, 1, \dots \quad (36)$$

$$y_h(x, 0) = x,$$

A^h es el subconjunto de A formado por los controles $\alpha(.)$ que toman valor constante en los intervalos $[jh, (j+1)h) \forall j = 0, 1, \dots$

II.2 Aproximación del problema con horizonte finito

II.2.1 Un esquema recursivo para la discretización en tiempo con horizonte finito

Si también, para el problema con horizonte finito, se discretiza la variable tiempo, se obtiene la función de costo óptimo u_T^h , definida recursivamente de la siguiente forma:

$$u_T^h(n-1, x) = \min_{\alpha \in A} \{(1 - \lambda h) u_T^h(n, x + hg(x, \alpha)) + hf(x, \alpha)\} \quad n = 1, \dots, \mu \quad (37)$$

$$u_T^h(\mu, x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (38)$$

Con lo que abreviadamente, se tiene:

$$u_T^h(n-1, x) = (A^h u_T^h(n, \cdot))(x)$$

$$u_T^h(\mu, x) = 0$$

Nota: Supondremos, en orden a simplificar el análisis, que

$$\mu = \frac{T}{h} \text{ es siempre entero.}$$

Interpretación:

Puede comprobarse sin mayor dificultad que u_T^h es la solución del problema de optimización:

$$u_T^h(n, x) = \min_{\alpha(.) \in A_T^h} J_T^h(n, x, \alpha(.)), \quad (39)$$

donde

$$J_T^h(n, x, \alpha(.)) = \sum_{j=n}^{\mu-1} h \cdot f(y_h(x, j), \alpha(jh)) (1 - \lambda h)^{j-n}, \quad (40)$$

A_T^h es el subconjunto de A_T formado por los controles $\alpha(.)$ que toman valor constante en los intervalos $[jh, (j+1)h) \forall j = 0, 1, \dots, \mu$ y donde la sucesión $y_h(x, j+1)$ está dada por la relación recursiva:

$$y_h(x, j+1) = y_h(x, j) + hg(y_h(x, j), \alpha(jh)),$$

$$j = n, \dots, (\mu-1).$$

$$y_h(x, n) = x$$

II.2.2 Propiedades de la función u_T^h

Las funciones u_T^h son acotadas y lipschitzianas, estrictamente tenemos:

Proposición II.2: Si (5)-(8) son válidas, entonces u_T^h es lipschitziana y acotada; es

decir, $\forall h \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right), \forall x, \hat{x} \in \Omega$

$$|u_T^h(n, x)| \leq \frac{M_f}{\lambda} (1 - (1 - \lambda h)^{\mu-n}) \quad (41)$$

$$|u_T^h(n, x) - u_T^h(n, \hat{x})| \leq L_{u_T^h}(n) \|x - \hat{x}\| \quad (42)$$

donde

$$L_{u_T^h}(n) \leq \begin{cases} L_f \frac{1}{L_g - \lambda} e^{(L_g - \lambda)(T - nh)} & \text{si } L_g > \lambda \\ L_f \frac{1}{\lambda - L_g} & \text{si } L_g < \lambda \\ L_f (T - nh) & \text{si } L_g = \lambda \end{cases}$$

II.3 Aproximación de los controles con funciones escalonadas

La demostración de la convergencia de u^h hacia u está basada en la consistencia de la aproximación de Euler y en el hecho que las políticas de control, por arbitrarias que sean, pueden ser aproximadas, al menos en sus efectos sobre el sistema real, por funciones escalonadas.

II.3.1 Un resultado básico de convexidad y sus aplicaciones

Las siguientes proposiciones señalan que las políticas medibles de control pueden ser reemplazadas por políticas simples (escalonadas con número fijo de conmutaciones), en sus efectos integrales y dan estimaciones de las correspondientes perturbaciones.

Lema II.1: Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}^r$, tal que $F = \{f(\alpha) / \alpha \in A\}$ es compacto. Entonces, para toda función medible $\alpha(.): [0, 1] \rightarrow A$, se verifica que:

$$w_0 \in \text{Co}F, \quad (43)$$

siendo

$$w_0 = \int_0^1 f(\alpha(t)) dt \quad (44)$$

$$\text{CoF} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_i \in F, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(45)

La prueba está basada en el hecho de que al ser F compacto, CoF es cerrado.

En base al Lema II.1, y teniendo en cuenta que cualquier punto de CoF puede expresarse en términos de los puntos extremales de CoF (que a su vez son puntos de F), se tiene que $\exists \alpha_i \in A, \lambda_i \geq 0; i = 1, r+1$, tales que:

$$w_0 = \int_0^1 f(\alpha(t)) dt = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i f(\alpha_i) \quad (46)$$

En consecuencia, existirá una partición del intervalo $[0, 1]$ en a lo sumo $(r+1)$ sub-intervalos I_i y una función escalonada $\alpha_w(\cdot)$ con valor constante en los sub-intervalos I_i , tal que:

$$\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i = 1, m(I_i) = \lambda_i, \alpha_i \in A, f(\alpha_i) \in F$$

$$\int_0^1 f(\alpha_w(t)) dt = \int_0^1 f(\alpha(t)) dt$$

El resultado es inmediatamente extensible a un intervalo arbitrario $[a, b]$, es decir: $\forall$ política $\alpha(\cdot)$ con valores en A , existe una política escalonada $\alpha_w(\cdot)$ con a lo sumo $(r+1)$ valores distintos en A , tal que:

$$\int_a^b f(\alpha_w(t)) dt = \int_a^b f(\alpha(t)) dt$$

Finalmente, de los resultados anteriores surge la siguiente extensión:

Lema II.2: Sea $b: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^r$ una función acotada y continua,

$$t_i = \frac{iT}{\mu},$$

$i = 0, 1, \dots, \mu$ una discretización del intervalo $[0, T]$, y $\alpha(\cdot)$ una función medible con valores en A , entonces existe una política escalonada α_w con valores en A , tal que:

α_w tiene a lo sumo $r+1$ escalones en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$

(47)

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t, \alpha(s)) ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t_i, \alpha_w(s)) ds$$

$$\forall i = 0, 1, \dots, \mu-1 \quad (48)$$

El siguiente lema establece una acotación entre las respuestas del sistema al control $\alpha(\cdot)$ y al control escalonado aproximante $\alpha_w(\cdot)$.

Lema II.3: Sea $y(\cdot)$ la respuesta correspondiente al control $\alpha(\cdot)$ (es decir, la solución de (3)). Consideremos una partición del intervalo $[0, T]$ en n_1 intervalos de longitud $h_1 = T/n_1$ y

$$y_w(t) = x + \int_0^t g(y_w(s), a_w(s)) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

donde α_w se obtiene a partir del lema II.2 cuando se lo aplica a la función $b: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$, con

$$b(t, \alpha) = (g'(y(t), \alpha), f(y(t), \alpha))'$$

luego

$$\|y(t) - y_w(t)\| < 3 M_g h_1 e^{L_g t} \quad (49)$$

Nota: Los lemas precedentes indican que cualquier política puede ser esencialmente reemplazada en sus efectos por políticas escalonadas con número prefijado de conmutaciones.

II.3.2 Aproximación con funciones uniformemente escalonadas

Para establecer los resultados de convergencia de los esquemas introducidos en II.1, es necesario trabajar con funciones escalonadas cuyos escalones tienen longitud uniforme h .

Las funciones que aparecen en el lema II.3, si bien tienen a lo sumo $v + 2$ escalones en cada sub-intervalo de longitud $h_1 = T/n_1$, esos escalones no son a priori de igual longitud, por lo que se debe transformar las funciones α_w en funciones α_w^h uniformemente escalonadas, con escalones de longitud:

$$h_2 = \frac{T}{n_1 n_2 (v + 2)} = \frac{h_1}{n_2 (v + 2)} \quad (50)$$

Los valores de α_w^h son definidos de forma tal que α_w^h coincide con α_w en todo el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, excepto a lo sumo en $(v + 1)$ sub-intervalos de longitud residual

$$\eta_{ij} < h_2$$

y en consecuencia a lo sumo en un conjunto de medida η_i tal que

$$\eta_i < (v + 1) h_2$$

es decir

$$m \{s / \alpha_w^h(s) \neq \alpha_w(s), s \in [t_{ij}, t_{i,j+1}]\} < \eta_i$$

En base a estas consideraciones, se puede probar el lema II.4, que establece una acotación de la diferencia de las respuestas del sistema a los controles $\alpha(\cdot)$ y $\alpha_w^h(\cdot)$, respectivamente.

Lema II.4: Sea $y(\cdot)$ la respuesta correspondiente al control $\alpha(\cdot)$ (es decir, la solución de (3)). Consideremos una partición del intervalo $[0, T]$ en μ intervalos de longitud $h = T/\mu$, $\mu = (v + 2) n_1 n_2$ y

$$y_w^h(t) = x + \int_0^t g(y_w^h(s), \alpha_w^h(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

donde α_w^h se obtiene aplicando la construcción arriba mencionada, entonces:

$$\|y(t) - y_w^h(t)\| < C \sqrt{h} e^{L_e t} \quad (51)$$

siendo C una constante que depende de los datos del problema.

II.4 Velocidad de convergencia

El resultado básico consiste en establecer acotaciones del error para tiempo finito.

II.4.1 La convergencia en el caso con horizonte finito

En base a la estimación (51) puede probarse el siguiente:

Teorema II.1: Sea una partición del intervalo $[0, T]$ en $n = (v + 2) n_1 n_2$ sub-intervalos de longitud $h = T/n$, entonces

$$\|u_T(0, x) - u_w^h(0, x)\| \leq C \phi(T) h^{1/2} \quad (52)$$

donde $\phi(T)$ está definida por

$$\phi(T) = \begin{cases} e^{(L_g - \lambda) T} & \text{si } L_g > \lambda \\ T & \text{si } L_g = \lambda \\ 1 & \text{si } L_g < \lambda \end{cases}$$

La demostración de este resultado está basada fundamentalmente en la propiedad de aproximación de las funciones medibles con funciones escalonadas descripta anteriormente (ver [17]-[19]).

II.4.2 La convergencia en el caso con horizonte infinito

Este caso se reduce al de horizonte finito, considerando una adecuada sucesión de problemas con horizonte finito y los resultados de estimación (52).

Teorema II.2:

$$\|u(x) - u^h(x)\| \leq C h^{1/2} \quad (53)$$

donde

$$C = \begin{cases} \gamma = 1 & \text{si } \lambda > L_g, \\ \gamma = \frac{\lambda}{L_g} & \text{si } \lambda < L_g, \\ \gamma \in (0, 1) & \text{si } \lambda = L_g. \end{cases}$$

II.4.3 Velocidad de convergencia para el caso semicóncavo

Si las funciones f y g verifican propiedades adicionales de semiconcavidad, es posible mejorar las estimaciones para el error $\|u - u^h\|$ en el conjunto $\lambda > L_g$.

Además de las técnicas de análisis convexo usadas, para obtener estos resultados deben considerarse las familias de funciones u_T^h y la propiedad de semiconcavidad de las mismas. Asimismo se emplean técnicas de regularización y resultados de la teoría de interpolación de funciones diferenciables que permiten obtener mejores estimaciones de $\|u_T - u_T^h\|$.

En términos de estas estimaciones puede acotarse el error total $\|u - u^h\|$ empleando el mismo procedimiento que en el Teorema II.2.

Definición:

Se dice que f y g verifican una propiedad de semiconcavidad, si $\forall \alpha \in A$

$$\|g(x+z, \alpha) - 2g(x, \alpha) + g(x-z, \alpha)\| \leq C \|z\|^2 \quad (54)$$

$$f(x+z, \alpha) - 2f(x, \alpha) + f(x-z, \alpha) \leq C \|z\|^2 \quad (55)$$

Propiedades auxiliares

Proposición II.3: Bajo la hipótesis (54)-(55) se tiene que $\forall n, u_T^h(n, \cdot)$ verifica la siguiente propiedad de semiconcavidad:

$$u_T^h(n, x+z) - 2u_T^h(n, x) + u_T^h(n, x-z) \leq \psi(T-nh) \|z\|^2 \quad (56)$$

donde

$$\psi(t) = \begin{cases} M e^{(2Lg-\lambda)t} & \text{si } 2Lg > \lambda \\ Mt & \text{si } 2Lg = \lambda \\ M & \text{si } 2Lg < \lambda \end{cases}$$

Definición de $u_{\rho,T}^h$, regularización de u_T^h

Por convolución con una función $\beta_\rho(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se obtiene una aproximación regular de u_T^h .

$$u_{\rho,T}^h(n, x) = (u_T^h(n, \cdot) * \beta_\rho)(x) = \int_{B(\rho)} u_T^h(n, x-y) \beta_\rho(y) dy \quad (57)$$

donde

$$\beta_1(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \beta_1(x) \geq 0, \forall x; \int_{\mathbb{R}^n} \beta_1(x) dx = 1,$$

soporte de

$$\beta_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq 1\}, \beta_\rho(x) = \frac{1}{\rho^n} \beta_1\left(\frac{x}{\rho}\right) \forall \rho \in \mathbb{R}^+$$

Con esta definición puede probarse que $u_{\rho,T}^h$ verifica las propiedades establecidas en las siguientes proposiciones:

Por convolución de (56), se obtiene la semiconcavidad de $u_{\rho,T}^h$:

Proposición II.4:

$$u_{\rho,T}^h(n, x+z) - 2u_{\rho,T}^h(n, x) + u_{\rho,T}^h(n, x-z) \leq \psi(T-nh) \|z\|^2 \quad (58)$$

$u_{\rho,T}^h(n, \cdot) \in C^\infty$, por lo tanto, tomando límite en (58), se obtiene:

Proposición II.5: La matriz hessiana de $u_{\rho,T}^h(n, \cdot)$ verifica la siguiente propiedad:

$$\left(\frac{\partial^2 u_{\rho,T}^h(n, x)}{\partial x^2} \right)_w \leq \psi(T-nh) \|w\|^2 \quad (59)$$

En virtud de las propiedades de convolución y teniendo en cuenta que $u_T^h(n, \cdot)$ es lipschitziana, tenemos la siguiente estimación para la diferencia entre la función u_T^h y su función regularizada:

Proposición II. 6: Si (18) es válida, entonces

$$|u_T^h(n, x) - u_{\rho,T}^h(n, x)| \leq L_{u^h} \rho \quad (60)$$

Por convolución de (37), se cumple la siguiente desigualdad:

Proposición II.7:

$$u_{\rho, T}^h(n, x) \leq (1 - \lambda h) u_{\rho, T}^h(n + 1, x + hg(x, a)) + hf(x, a) + ((1 - \lambda h) L_{u_T^h} L_g + L_f) h \rho \quad (61)$$

$$|u_T(0, x) - u_T^h(0, x)| \leq \begin{cases} Mh & \text{si } 2Lg < \lambda \\ MTh & \text{si } 2Lg = \lambda \\ Me^{(2Lg - \lambda)T} h & \text{si } 2Lg > \lambda \end{cases} \quad (64)$$

Usando desigualdades provenientes de la teoría de interpolación, sigue de (59) que:

Finalmente, en base a la desigualdad:

Proposición II.8:

$$\sum_{j=0}^{v+1} u_{\rho, T}^h(i + 1, y(t_i) + hg(y(t_i), a_{i,j})) \lambda_{i,j} \leq$$

$$|u(x) - u^h(x)| \leq M e^{\lambda T} + |u_T(0, x) - u_T^h(0, x)| \quad (65)$$

puede obtenerse:

$$u_{\rho, T}^h(i + 1, y(t_i) + h \sum_{j=0}^{v+1} g(y(t_i), a_{i,j}) \lambda_{i,j}) + M \psi(T - (i + 1)h) h^2 \quad (62)$$

Teorema II.5: Bajo las hipótesis (5)-(8), (54), (55) se verifica que:

donde λ_{ij} verifica $\sum_{j=0}^{v+1} \lambda_{ij} = 1, \lambda_{ij} \geq 0$.

$$|u(x) - u^h(x)| \leq \begin{cases} Ch & \text{si } 2Lg < \lambda \\ Ch^\gamma \quad \gamma \in (0, 1) & \text{si } 2Lg = \lambda \\ Ch^{\gamma/2} & \text{si } 2Lg > \lambda \end{cases} \quad (66)$$

Las propiedades previas permiten obtener una cota superior para u_T^h establecida en el siguiente teorema:

Teorema II.3: Bajo las hipótesis (5)-(8), (54)-(55) se tiene:

$$u_T^h(0, x) \leq u_T(0, x) + \psi(T) h \quad (63)$$

Nota: La desigualdad recíproca:

$$u_T^h(0, x) \geq u_T(0, x) + \psi(T) h$$

es una simple consecuencia de la consistencia de la aproximación de Euler.

Para el caso con funciones semicóncavas, el efecto de la propiedad de regularidad (56) sobre la velocidad de convergencia queda establecida por el siguiente teorema:

Teorema II.4: Bajo las hipótesis (5)-(8), (54), (55) se tiene:

Nota: La estimación (66) mejora (53) (estimación obtenida en el caso general, sin las propiedades de semiconcavidad en el conjunto $\gamma > 1$).

Nota: En [3] Capuzzo Dolcetta-Ishii han obtenido otras mejoras de las estimaciones de la velocidad de convergencia, usando también argumentos de viscosidad y bajo hipótesis de semiconcavidad. En particular, han presentado la estimación:

$$|u^h(0, x) - u(0, x)| \leq \begin{cases} Ch & \text{si } 2Lg < \lambda \\ Ch^{(\gamma-1)} & \text{si } Lg < \lambda < 2Lg \end{cases} \quad (67)$$

En consecuencia, esta estimación mejora la cota (53) solamente en el conjunto $3/2 < \gamma < 2$. Es también posible observar que la estimación (66) es mejor que (67) en el conjunto $1 < \gamma < 2$.

III. SOLUCION TOTALMENTE DISCRETA

Para obtener resultados numéricos prácticos, es necesario realizar, no sólo la discretización en tiempo presentada en II, sino también discretizar la ecuación (11) con respecto a las variables de estado. De esta forma es posible calcular una solución totalmente discreta u_k^h , problema que se analizará en esta sección. Las estimaciones del error de aproximación $\|u(x) - u_k^h(x)\|$ se obtiene básicamente a partir de las estimaciones (52), (53), (64), (66).

En esta dirección algunos resultados previos habían sido obtenidos en [7], [8], [13], [20], [23], [24], [25], [28].

Se analiza aquí el método totalmente discretizado presentado en [18]-[19], que puede ser implementado computacionalmente y se reseñan las estimaciones explícitas obtenidas para la velocidad de convergencia de las soluciones totalmente discretizadas hacia la función de costo óptimo, solución del problema original.

Los principales resultados analizados en esta sección son los siguientes:

- El Teorema III.2 da una estimación del error de la solución totalmente discretizada en función de los parámetros de discretización h y k (pasos de discretización en el tiempo y en el espacio respectivamente).
- Estas estimaciones indican que para el caso general, cuando la función de costo óptimo es lipchitziana, el orden de convergencia obtenible es de tipo $k^{1/2}$.
- En el caso general con coeficiente de descuento λ pequeño (donde u es solamente hölderiana de orden $\gamma < 1$), la velocidad de convergencia obtenible es de orden $k^{\gamma/2}$.
- Se determinan las relaciones óptimas que se debe tener entre los parámetros h y k , para obtener el mínimo error de discretización. El valor óptimo de h es diferente

según se trate el caso general o el caso regular.

En el caso general la velocidad óptima de convergencia es del orden $k^{\gamma/2}$, (suponiendo que se usa un paso de orden $h \leq k$).

En el caso regular, donde se suponen propiedades de semiconcavidad y la condición $\gamma > 1$, la estimación del error puede ser mejorada, obteniéndose un error total del orden k^ε , con $\varepsilon = (\gamma/(\gamma+1) \wedge (2/3))$. Esto ocurre cuando es utilizado un paso de tiempo $h = k^\eta$, con $\eta = (2/(\gamma+1) \vee (2/3))$.

En III.4 se presentan ejemplos que muestran la optimalidad de dichas estimaciones.

III.1 Presentación del problema totalmente discretizado

III.1.1 Discretización del dominio Ω

Haremos referencia a la discretización en las variables espaciales con el parámetro k , quien medirá también la fineza de la discretización.

Supondremos que Ω es un dominio abierto de $\mathbb{R}^n$ y (S^k) una familia de triangulaciones regulares de Ω . Estas familias de conjuntos aproximan a Ω en el siguiente sentido:

$\Omega_k = \bigcup_j S_j^k$ es un poliedro de $\mathbb{R}^n$ tal que se

verifican las siguientes propiedades:

$$\bullet \max_j (\text{diám } S_j^k) = k \quad (68)$$

$$\bullet \exists h_0 > 0 \text{ tal que } x + hg(x, a) \in \Omega_k \\ \forall x \in \Omega_k, \forall a \in A, \forall h < h_0 \quad (69)$$

• $\Omega_k \rightarrow \Omega$, cuando $k \rightarrow 0$, en el siguiente sentido:

$$\forall \text{ compacto } K \subset \Omega, \exists \bar{k}(K) / K \subset \Omega_k \\ \forall k < \bar{k}(K) \quad (70)$$

• Si d_i es el diámetro del simplex S_i^k , entonces: $\exists \chi_1 > 0$ tal que para cualquier simplex de Ω_k , existe una esfera de radio

$$r \geq \chi_1 d_i \quad (71)$$

en el interior del simplex.

- Existe M , independiente de la discretización, tal que:

$$\frac{k}{d_i} \leq M \quad \forall i. \quad (72)$$

Notación: Denotamos con N la cardinalidad del conjunto de vértices de Ω_k , siendo $(x_i, i = 1, \dots, N)$ un apropiado ordenamiento del conjunto de vértices de Ω_k .

III.1.2 El espacio de funciones aproximantes W_k

Se considera el conjunto de funciones W_k afines en cada simplex y continuas en Ω_k (elementos finitos lineales). Por lo tanto, los elementos $w \in W_k$ están individualizados por los valores $w(x_i)$ que asumen en los nodos x_i de la triangulación, ($i = 1, N$).

III.1.3 Definición del operador discreto A_k^h

Definimos $A_k^h: W_k \rightarrow W_k$

$$\begin{aligned} (A_k^h w)(x_i) &= \\ &= \min_{a \in A} ((1 - \lambda h) w(x_i + hg(x_i, a)) + hf(x_i, a)) \\ &\quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (73)$$

Nota: Si el conjunto A es un conjunto infinito, se debe hacer también una discretización del espacio de controles. Para simplificar la exposición, supondremos en adelante que A es finito.

III.1.4 Introducción del problema totalmente discreto P_k

El problema de tipo punto fijo no lineal, que debe ser resuelto numéricamente, toma la forma:

Problema P_k : *Encontrar el punto fijo del operador A_k^h* (74)

Como todo punto $x \in \Omega_k$ es una combinación convexa de los vértices del simplex al

cual pertenece, en consecuencia, en función de las componentes $w(x_i)$, se tiene:

$$\begin{aligned} (A_k^h w)(x_i) &= \min_{a \in A} \\ ((1 - \lambda h) \sum_{j=1}^N \alpha_j(x_i, a) w(x_j) + hf(x_i, a)) \end{aligned} \quad (75)$$

donde $\alpha_j(x_i, a)$ son los coeficientes de una matriz $A \in \mathcal{R}^{N \times N}$, que verifica la siguiente propiedad:

$$\alpha_j(x_i, a) \geq 0 \quad \forall i, j \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j(x_i, a) = 1, \quad \forall i$$

$$x_i + hg(x_i, a) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(x_i, a) x_j \quad \forall i$$

III.1.5 El problema totalmente discreto para el caso con horizonte finito

También al problema con horizonte finito le asociamos una solución totalmente discreta. Definimos recursivamente para $1 \leq n \leq \mu = T/h$ la función $u_{k,n}^h$, solución aproximada del problema con horizonte finito, en la siguiente forma:

$$u_{k,n-1}^h = A_k^h u_{k,n}^h \quad (76)$$

$$u_{k,\mu}^h = 0 \quad (77)$$

Nota: $u_{k,n}^h$ es básicamente una función auxiliar usada en la demostración del Teorema III.2.

III.2 Existencia y unicidad de la solución discreta

El problema P_k está bien planteado en el siguiente sentido:

Teorema III.1: *Existe una única solución u_k^h del problema P_k*

La demostración es inmediata teniendo en cuenta que bajo la norma:

$$\|w\| = \max_i |w(x_i)|,$$

A_k^h es un operador contractivo y por lo tanto tiene un único punto fijo. Si lo notamos con u_k^h , tenemos:

$$u_k^h = A_k^h u_k^h \quad (78)$$

Nota: El problema P_k está relacionado con las condiciones de optimalidad de un problema de control óptimo de una cadena de Markov [20], [27]. Puede ser resuelto, entonces, por los métodos basados en las iteraciones de tipo Picard, de Howard y sus variantes. En [1], [14], [15], [16], [27] pueden verse diferentes cuestiones referentes a este aspecto computacional del problema.

III.3 Convergencia de las soluciones discretas

III.3.1 Presentación del resultado central

El resultado central sobre estimaciones de la velocidad de convergencia está dado por el siguiente teorema:

Teorema III.2: Supongamos que se cumplen (5)-(8) y las propiedades generales de la triangulación descritas en (68)-(72). Entonces, existe una constante M independiente de h, k , tal que:

$$|u(x) - u_k^h(x)| \leq \begin{cases} M \left(\sqrt{h} + \frac{k}{\sqrt{h}} \right), & \text{si } Lg < \lambda \\ M \left(\sqrt{h} + \frac{k}{\sqrt{h}} \right)^\gamma, & \text{con } \gamma = \frac{\lambda}{Lg} \\ & \text{si } Lg > \lambda \\ M \left(\sqrt{h} + \frac{k}{\sqrt{h}} \right)^\gamma, & \gamma \in (0, 1) \\ & \text{si } Lg = \lambda \end{cases}$$

También, si (54)-(55) son válidas entonces las estimaciones (79) pueden ser mejoradas, más aún se verifica que:

$$|u(x) - u_k^h(x)| \leq \begin{cases} M \left(h + \frac{k}{\sqrt{h}} \right), & \text{si } 2Lg < \lambda \\ M \left(h^\gamma + \frac{k}{\sqrt{h}} \right), & \text{con } \gamma \in (0, 1) \\ & \text{si } 2Lg = \lambda \\ M \left(h^{\gamma/2} + \frac{k}{\sqrt{h}} \right), & \text{con } \gamma = \frac{\lambda}{Lg} \\ & \text{si } Lg < \lambda < 2Lg \\ M \left(h^{\gamma/2} + \frac{k}{\sqrt{h}} \right)^\gamma, & \text{con } \gamma \in (0, 1) \\ & \text{si } Lg < \lambda < 2Lg \\ M \left(h^{\gamma/2} + \frac{k}{\sqrt{h}} \right)^\gamma, & \text{con } \gamma = \frac{\lambda}{Lg} \\ & \text{si } Lg < \lambda < 2Lg \end{cases} \quad (80)$$

Nota: En [18] puede verse la demostración del orden de la convergencia para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. El caso general puede ser tratado sin cambios fundamentales usando técnicas de perturbación de dominio (ver [13]).

La demostración del Teorema III.2, se obtiene en base al principio de máximo discreto (PMD) [4] verificado por los esquemas de discretización utilizados y a las propiedades enunciadas en los siguientes párrafos.

III.3.3 Propiedades de las funciones auxiliares

El resultado central de la estimación del orden de convergencia se basa en la descomposición del error:

$$|u(x) - u_k^h(x)|,$$

en cuatro sumandos:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_k^h(x)| &\leq |u(x) - u_T(x)| + \\ &+ |u_T(x) - u_T^h(x)| + |u_T^h(x) - u_{k,T}^h(x)| + \\ &+ |u_{k,T}^h(x) - u_k^h(x)| \quad (81) \end{aligned}$$

Los siguientes lemas brindan estimaciones de cada uno de los términos de (81).

Lema III.1: Bajo las hipótesis (5)-(8), se tiene:

$$| u(x) - u_T(x) | \leq \frac{M_f}{\lambda} e^{-\lambda T} \quad (82)$$

Lema III.2: Si (5)-(8) se satisfacen, entonces:

$$| u_{k,T}^h(x) - u_k^h(x) | \leq \frac{M_f}{\lambda} e^{-\lambda T} \quad (83)$$

Lema III.3: Bajo las hipótesis (5)-(8), se tiene:

$$| u_T^h(x) - u_{k,T}^h(x) | \leq \begin{cases} M \frac{k}{\sqrt{h}} & \text{si } Lg < \lambda \\ M e^{\alpha_g - \lambda T} \frac{k}{\sqrt{h}} & \text{si } Lg > \lambda \\ MT \frac{k}{\sqrt{h}} & \text{si } Lg = \lambda \end{cases} \quad (84)$$

III.3.4 Relaciones entre los parámetros de discretización h y k

Partiendo de las estimaciones (79) y (80), puede tratarse el problema de determinar cuál es la mejor relación entre h y k con vista a minimizar la cota del error y asimismo verificar si esas cotas son realizadas (saturadas), es decir comprobar la optimalidad de esas acotaciones.

En los siguientes párrafos se analizan estos problemas.

Cuestiones de optimización paramétrica

Las estimaciones (79) y (80) dependen de los parámetros h y k. Dado que k mide la fineza de la triangulación Ω_k empleada, en cierta forma está relacionada con la cantidad total de información de ser procesada o también la memoria máxima disponible.

Puede entonces pensarse que este parámetro está fijo y buscar de determinar el valor del parámetro h (que representaría una modalidad especial de resolver el problema) que da el menor error de discretización. Este valor crítico de h se determina minimizando las expresiones (79) y (80).

Los resultados son entonces diferentes según se trate el caso general o el caso con semiconcavidad.

a) Caso general

Vale aquí la estimación (79), por lo que el valor de h minimizante es $h = k$. En consecuencia, usando este valor de h, la acotación del error toma la forma:

$$| u(x) - u_k^h(x) | \leq \begin{cases} M k^{1/2} & \text{si } Lg < \lambda \\ M k^{\gamma/2}, \quad \text{con } \gamma = \frac{\lambda}{Lg} & \text{si } Lg > \lambda \\ M k^{\gamma/2}, \quad \gamma \in (0, 1) & \text{si } Lg = \lambda \end{cases} \quad (87)$$

Observación:

La estimación (87) marca el límite de precisión para este tipo de aproximaciones, ya que esta cota puede ser saturada como lo muestran los contraejemplos presentados en III.4.1 - III.4.3.

b) Caso regular

En este caso vale la estimación (80), por lo que el valor minimizante de h resulta diferente según sea la relación entre λ y Lg .

• Caso $\lambda > 2Lg$ Aquí resulta

$$h = C k^{2/3} \quad (88)$$

y la estimación (80) deviene:

$$| u(x) - u_k^h(x) | \leq M k^{2/3} \quad (89)$$

• Caso $Lg < \lambda < 2Lg$

Aquí el valor minimizante de h es:

$$h = C k^{2/(\gamma+1)} \quad (90)$$

y en este caso se obtiene la estimación:

$$| u(x) - u_k^h(x) | \leq M k^{\gamma/(\gamma+1)} \quad (91)$$

• Caso $Lg > \lambda$

El valor crítico de h resulta:

$$h = C k \quad (92)$$

y en este caso la estimación (80) toma la forma:

$$|u(x) - u_k^h(x)| \leq M k^{\gamma/2} \quad (93)$$

Escribiendo en forma resumida:

$$|u(x) - u_k^h(x)| \leq \begin{cases} M k^{2/3} & \text{si } 2Lg < \lambda \\ M k^{\gamma(\gamma+1)} & \text{si } Lg < \lambda < 2Lg \\ M k^{\gamma/2} & \text{si } Lg > \lambda \end{cases} \quad (94)$$

Observación:

De las expresiones (88), (90), (92) y (94), puede observarse una variación continua, tanto de la estimación del error como del valor minimizante del parámetro h .

III.4 Optimalidad de las estimaciones $k^{1/2}$, $k^{2/3}$, $k^{\gamma/2}$

Comentario general

Para mostrar que las estimaciones (87) y (94), son óptimas, es decir que existen problemas donde esas desigualdades son saturadas (se verifica la igualdad) se construyen ejemplos donde, o bien existe solución explícita, o bien el error puede ser también estimado inferiormente a través de cálculos más o menos simples.

III.4.1 Optimalidad de la estimación $k^{1/2}$

El ejemplo bajo análisis está definido de la siguiente forma:

El dominio Ω es un anillo circular de radios r_1 , r_3 . Si el punto genérico x se escribe en coordenadas polares (θ, r) , la evolución de estas variables es:

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{r} = \rho(r, a).$$

$a \in A$, siendo $A = (a_1, a_2)$ el conjunto de controles.

Por lo tanto, el sistema sigue un movimiento radial. Para g escrita en coordenadas polares, se tiene:

$$g(\theta, r, a) = (0, \rho(r, a))'$$

Con $r_1 > 0$, $r_2 = 2r_1$, $r_3 = 2r_2$, se define:

$$\rho(r, a_1) = 0 \quad \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad r_1 \leq r \leq r_3$$

$$f(\theta, r, a_1) = \lambda(|\theta| + 1)(|r - r_2| + 1) \quad \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad r_1 \leq r \leq r_3,$$

$$\rho(r, a_2) = \begin{cases} 1 & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ & r_1 \leq r \leq r_2 \\ -\frac{1}{2r_1}r + 2 & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ & r_2 < r < r_3 \end{cases}$$

$$f(\theta, r, a_2) = \begin{cases} \lambda(|\theta| + 1) & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad r_1 \leq r \leq r_2 \\ \lambda(|\theta| + 1)(5(r - r_2) + 1) & \end{cases}$$

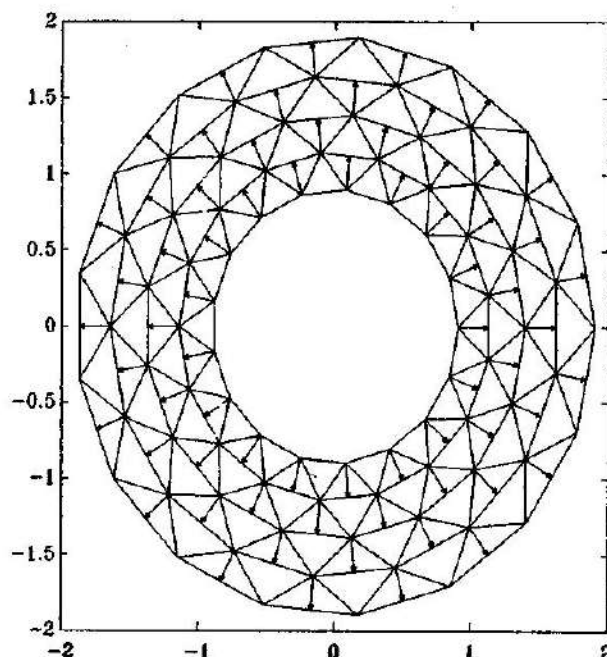


Figura 1

$$\forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad r_2 \leq r \leq r_3$$

$$r_1 \leq r \leq r_3$$

Para calcular la solución discretizada se considera una triangulación de Ω del tipo mostrado en la Figura 1. Se comprueba en base a la forma de estos datos, usando la triangulación indicada y estimaciones fundadas en la fórmula de Stirling que:

$$\max_{x \in \Omega} |u_k^h(x) - u(x)| \geq C_1 \sqrt{k} \quad (95)$$

y en consecuencia, queda evidenciado que la estimación (87) es óptima para este tipo de aproximaciones.

III.4.2 Optimalidad de la estimación $k^{2/3}$

Se considera el mismo problema que el descrito en III.4.1, pero con la salvedad que aquí, cada nodo de la red x_i está relacionado con el punto $x_i + hg(x_i, a)$, con un nuevo paso h de orden $k^{2/3}$, es decir, estrictamente:

$$h = (r_2 - r_1)/p^{1/3}, \quad k = 2r_3 \sin(\pi/(p+1)), \quad (96)$$

siendo p entero tal que $p^{1/3}$ es entero.

Siguiendo el mismo procedimiento que el empleado para obtener la estimación (95), se arriba en este caso a:

$$\max_{x \in \Omega} |u_k^h(x) - u(x)| > C_2 k^{2/3} \quad (97)$$

Por lo que este ejemplo muestra no sólo que el método general de aproximación puede ser mejorado en el caso regular (pasando de errores de tipo $k^{1/2}$ a $k^{2/3}$) sino que esta mejora es la máxima que puede ser lograda.

III.4.3 Optimalidad de la estimación $k^{1/2}$

Se considera también aquí un sistema dinámico con evoluciones en un anillo circular de radios r_1, r_3 . Es decir, si (θ, r) son las coordenadas de un punto genérico x , se tiene que

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3.$$

La evolución del sistema está descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\theta} = 2\pi$$

$$\dot{r} = \rho(r, a)$$

$$g(\theta, r, a) = (2\pi, \rho(r, a))'$$

$$\rho(r, a_1) = 0 \quad \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 1 \leq r \leq 3$$

$$f(\theta, r, a_1) = \lambda \quad \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 1 \leq r \leq 3,$$

$$\rho(r, a_2) = \begin{cases} r-2 & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 1.2 \leq r \leq 2.8 \\ 4(1-r) & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 1 \leq r \leq 1.2 \\ 4(3-r) & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 2.8 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

$$f(\theta, r, a_2) = \begin{cases} 0 & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 1.5 \leq r \leq 2.5 \\ \frac{1.5-r}{0.3} \lambda & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 1 \leq r \leq 1.5 \\ \frac{r-2.5}{0.3} \lambda & \forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 2.5 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

Para este problema, puede comprobarse que $Lg = 1$ y si se toma $\lambda < 1$, se tiene que $\gamma = \lambda/Lg < 1$.

Si se considera la triangulación de Ω descrita en [18], es posible probar que para esa triangulación vale la siguiente desigualdad:

$$\max_{x \in \Omega} |u_k^h(x) - u(x)| > C k^{1/2} \quad (98)$$

Lo que prueba que la estimación del tipo $k^{1/2}$ es óptima.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BELBAS S. A., MAYERGOYZ I. D.: Applications of fixed-point methods to discrete variational and quasi-variational inequalities. *Numerische Mathematik*, Vol. 51, pp. 631-654, 1987.
- [2] CAPUZZO DOLCETTA I.: On a discrete approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 10, pp. 367-377, 1983.
- [3] CAPUZZO DOLCETTA I., ISHII H.: Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 11, pp. 161-181, 1984.
- [4] CIARLET P. G.: Discrete maximum principle for finite-difference operators. *Aequationes Math.*, Vol. 4, pp. 338-352, 1970.
- [5] CRANDALL M. G., EVANS L. C., LIONS P. L.: Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 282, pp. 487-502, 1984.
- [6] CRANDALL M. G., LIONS P. L.: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 277, pp. 1-42, 1983.
- [7] CRANDALL M. G., LIONS P. L.: Two approximation of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Mathematics of Computation*, Vol. 43, N° 167, pp. 1-19, 1984.
- [8] FALCONE M.: A numerical approach to the infinite horizon problem of deterministic control theory. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 15, pp. 1-13, 1987.
- [9] FLEMING W. H., RISHEL R. W.: *Deterministic and Stochastic Optimal Control* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975).
- [10] FRIEDMAN A.: *Differential Games* (Wiley-Interscience, New York, 1971).
- [11] GLOWINSKI R., LIONS J. L., TRÉMOLIERES R.: *Numerical Analysis of Variational Inequalities* (North Holland, Amsterdam, 1981).
- [12] GONZALEZ R. L. V.: Sur l'existence d'une solution maximale de l'équation de Hamilton-Jacobi. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie I*, Tome 282, pag. 1287-1290, 1976.
- [13] GONZALEZ R. L. V., ROFMAN E.: On deterministic control problems: an approximation procedure for the optimal cost. Part I and II. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23, pp. 242-285, 1985.
- [14] GONZALEZ R. L. V., SAGASTIZABAL C.: Un algorithme pour la résolution rapide d'équations discrètes de Hamilton-Jacobi-Bellman. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie I*, Tome 311, pag. 45-50, 1990.
- [15] GONZALEZ R. L. V., TIDBALL M. M.: Fast solution discrete Isaacs'inequalities, *Rapport de Recherche* N° 1167, INRIA, 1990.
- [16] GONZALEZ R. L. V., TIDBALL M. M.: Fast solution of general nonlinear fixed point problems, *Rapport de Recherche* N° 1339, INRIA, 1990.
- [17] GONZALEZ R. L. V., TIDBALL M. M.: On a discrete time approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming, *Rapport de Recherche*, N° 1375, INRIA, 1990.
- [18] GONZALEZ R. L. V., TIDBALL M. M.: On the rate of convergence of fully discrete solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Rapport de Recherche*, N° 1376, INRIA, 1991.
- [19] GONZALEZ R. L. V., TIDBALL M. M.: Sur l'ordre de convergence des solutions discrétisées en temps et en espace de l'équation de Hamilton-Jacobi, *Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, Tome 314, Serie I*, p. 479-482, 1992.
- [20] KUSHNER H. J.: *Probability Methods in Stochastic Control and for Elliptic Equations* (Academic Press, New York, 1977).
- [21] LIONS P. L.: *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations* (Pitman, London, 1982).
- [22] LIONS P. L.: Optimal control and viscosity solutions. In *Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming*, edited by Capuzzo Dolcetta I., Fleming W. H., Zolezzi L., pp. 94-102, (Springer Verlag, New York, 1985).
- [23] Loretti P.: Approssimazione di soluzioni viscosità dell'equazione di Bellman. *Bollettino U.M.I.* (6) 5, pp. 141-163, 1986.
- [24] MENALDI J. L.: Probabilistic view of estimates for finite difference methods. *Mathematicae Notae*, Vol. 32, pp. 1-37, 1987/88.
- [25] MENALDI J. L.: Some estimates for finite difference approximations. *SIAM Journal on Control and Optimization*. Vol. 27, N° 3, pp. 579-607, 1989.
- [26] ROCKAFELLAR T. R.: *Convex Analysis* (Princeton, New Jersey, 1970).
- [27] ROSS S. M.: *Applied Probability Models with Optimization Applications* (Holden-Day, San Francisco, 1970).
- [28] SOUGANIDIS P. E.: Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *J. Diff. Equa.* 59, pp. 1-43, 1985.