

GENERALIZACION DE UN TEOREMA DE EXTRAPOLACION *

por *Oswaldo N. Capri*

Señor Presidente de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Dr. Andrés Stoppani, Señores Académicos, Señoras y Señores:

Agradezco vivamente a esta Academia la prestigiosa distinción que, a pesar de mis limitados méritos, me ha otorgado. Me siento muy honrado por ello y a la vez comprometido a intensificar mi trabajo con el fin de lograr una mejor y mayor producción científica.

En esta circunstancia tan grata para mí quiero evocar con emoción y gratitud a la personalidad omnipresente de mi querido maestro, el Dr. Alberto González Domínguez. Él fué quien guió mis primeros pasos en el estudio serio del Análisis Matemático Superior, y quien supo transmitirme el fervoroso entusiasmo con que abordaba el planteo y la resolución de los problemas que surgían del estudio y de la investigación. A él le debo la dirección de mi tesis doctoral y la iniciación en la investigación matemática.

Agradezco las palabras del Sr. Académico Ing. Roque Scarfiello. Sus apreciaciones elogiosas sobre mi persona han sido motivadas por el hecho que él, como profesor, ha contribuido a mi formación profesional y sobre todo a la gran amistad, de larga data, que media entre ambos.

A continuación expondré el tema enunciado "Una generalización de un teorema de extrapolación".

Una generalización de un teorema de extrapolación

El matemático japonés S. Yano demostró en 1951 (J. Math. Soc. Japan, 3 [1951], 296-305) que si T es un operador lineal tal que

$$T : L^p(a, b) \rightarrow L^p(a, b), \quad \text{para todo } 1 < p \leq 2,$$

donde (a, b) , es intervalo finito de la recta, y tal que

$$\|Tf\|_p \leq \frac{B}{(p-1)^\alpha} \|f\|_p, \quad \text{para todo } 1 < p \leq 2,$$

* Premio Alberto González Domínguez, Trienio 1982-84 (D'a 25 Octubre de 1985).

donde $B \geq 0$ y $a > 0$ son constantes, entonces

$$(1) \quad \int_a^b |Tf(x)| dx \leq c_1 + c_2 \int_a^b |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^\alpha dx,$$

En realidad esto no es el enunciado primitivo del teorema de S. Yano, sino una versión perfeccionada del teorema original debida a A. Zygmund.

Es de hacer notar que las constantes c_1 y c_2 que aparecen en la fórmula (1) dependen de manera complicada (no lineal) de la medida del intervalo (a, b) . Esto es un inconveniente serio si se quiere extender el teorema al intervalo infinito.

En un trabajo, en colaboración con el Dr. Norberto A. Fava, hemos logrado estimaciones más precisas que las obtenidas por Yano y por Zygmund, las que nos han permitido extender el teorema anterior a espacios de medida σ -finita obteniendo el siguiente teorema.

Teorema de Extrapolación

Sean (X, μ) y (Y, ν) dos espacios de medida σ -finita. Con S designamos al espacio de las funciones simples integrables del espacio X y con M al espacio de las funciones medibles del espacio Y . Sea $T: S \rightarrow M$ un operador sublineal tal que

$$(2) \quad \|Tf\|_p \leq \frac{B}{(p-1)^\alpha} \|f\|_p,$$

para todo $1 < p \leq p_0$, donde $p_0 > 1$, $B \geq 0$ y $a > 0$.

Entonces, para todo subconjunto A de Y de medida ν finita se tiene

$$(3) \quad \int_A |Tf| d\nu \leq c_1 \nu(A) + c_2 \int |f| [1 + (\log^+ |f|)^\alpha] d\mu.$$

Además, para todo $\lambda > 0$, se cumple

$$(4) \quad \int_{|Tf| > \lambda} |Tf| d\nu \leq c \int |f| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|f|}{\lambda} \right)^\alpha \right] d\mu,$$

donde c_1 , c_2 y c en las fórmulas (3) y (4) son constantes positivas que sólo dependen de p_0 , B y α .

Si además el operador satisface a la condición

$$(\Delta) \quad |Tf - Tg| \leq b |T(f-g)|,$$

donde b es una constante, entonces T admite una única extensión continua al espacio de Orlicz $L(1 + \log^+ L)^\alpha$, y el operador extendido cumple

las desigualdades (3) y (4) con las mismas constantes que las primitivas.

Hacemos notar que la condición (Δ) se verifica automáticamente, con $b = 1$, si T es lineal o si T es sublineal y positivo.

Cabe señalar que, mediante la teoría de la integral de Bochner, se puede generalizar nuestro Teorema de Extrapolación a operadores sublineales $T : S \rightarrow M$, donde S es ahora el espacio de las funciones simples integrables definidas en X y con valores en un espacio de Banach B_1 y M el espacio de las funciones fuertemente medibles definidas en Y que toman valores en otro espacio de Banach B_2 .

A continuación describiremos algunas aplicaciones del teorema de extrapolación enunciado.

Aplicación a Operadores Integrales Singulares

Sea

$$(5) \quad Tf(x) = \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy$$

un operador integral singular de Calderón-Zygmund del tipo considerado en el trabajo fundamental "On singular Integrals", Acta Math. Vol. 88 (1952) 85-139, donde se supone que el núcleo $K(x)$ es de la forma

$$K(x) = \Omega(x) / |x|^n,$$

donde $\Omega(x)$ es una función positivamente homogénea de grado cero, de integral nula sobre la superficie de la bola unitaria y tal que

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

donde $\omega(t) = \sup \{ |\Omega(x) - \Omega(y)| : |x| = |y| = 1, |x-y| \leq t \}$.

Entonces el operador T , definido por (5), es de tipo fuerte (p, p) , $1 < p < \infty$:

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

y de tipo débil $(1, 1)$. De donde resulta, por aplicación del teorema de interpolación de Marcinkiewicz, que existe una constante B tal que

$$\|Tf\|_p \leq \frac{B \|f\|_p}{p-1}, \quad (1 < p \leq 2).$$

Por lo tanto el operador T , que es lineal, verifica la hipótesis (2) del Teorema de Extrapolación con $\alpha = 1$. En consecuencia, de la fórmula

(3) de dicho teorema obtenemos la siguiente relación bien conocida en la teoría de integrales singulares.

$$(6) \quad \int_A |Tf(x)| dx \leq c_1 |A| + c_2 \int_{R^n} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|) dx,$$

válida para todo subconjunto A de R^n de medida $|A|$ finita.

La fórmula (6) se cumple asimismo en el caso en que T sea el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Cabe también señalar que la relación (6) vale en el caso que T sea un operador integral singular del tipo considerado por A. Benedek, A. P. Calderón y R. Panzone en el trabajo "Convolution operators on Banach valued functions" publicado en Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 48 (1962), 356-365.

Aplicación al Teorema Maximal Fuerte

Sea $f(x)$ una función localmente integrable respecto a la medida de Lebesgue de R^n , es decir una función $f(x)$ integrable sobre todo subconjunto acotado de R^n , se define

$$Sf(x) = \sup_{x \in R} \left\{ \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy \right\},$$

donde al tomar el supremo R recorre el conjunto de todos los rectángulos n -dimensionales de aristas paralelas a los ejes coordenados que contienen al punto x y donde $|R|$ designa a la medida del rectángulo R .

El operador S , así definido, se denomina el *operador maximal fuerte*. S es no lineal, pero es sublineal y positivo. Por lo tanto S satisface a la condición (Δ) .

Es fácil probar que S está mayorado por la composición de n -operadores maximales parciales:

$$(7) \quad Sf(x) \leq M_n M_{n-1} \dots M_1 f(x),$$

donde

$$M_1 f(x) = \sup_{x_1 \in I} \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(t, x_2, \dots, x_n)| dt \right\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n);$$

donde I es un intervalo unidimensional que contiene al punto x_1 , y donde $|I|$ es la longitud de I . Análogamente se definen los operadores M_2, \dots, M_n .

Del teorema maximal de Hardy-Littlewood unidimensional se deducen las siguientes relaciones:

$$(8) \quad |\{M_j f(x) > 2\lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{|f| > \lambda} |f(x)| dx \quad (j = 1, \dots, n), \quad (\lambda > 0)$$

$$(9) \quad \|M_j f\|_p \leq \frac{2^{1+1/p} p^{1/p}}{(p-1)^{1/p}} \|f\|_p \quad (1 < p < \infty) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Consideremos el operador

$$(10) \quad Tf(x) = M_{n-1} \dots M_1 f(x).$$

Es fácil ver que T es sublineal y positivo, lo que implica T satisface a la condición (Δ) . De (9) y (10) se tiene que

$$\|Tf\|_p \leq \frac{B}{(p-1)^{n-1}} \|f\|_p \quad (1 < p \leq 2).$$

Por lo tanto T satisface a las hipótesis del Teorema de Extrapolación con $\alpha = n-1$. Por la fórmula (4) de dicho teorema, tenemos

$$(11) \quad \int_{|Tf| > \lambda} |Tf(x)| dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{n-1} \right] dx,$$

para todo $\lambda > 0$. Por otra parte, de (7) y (10) tenemos

$$Sf(x) \leq M_n Tf(x).$$

De donde, y en virtud de las fórmulas (8) y (11), obtenemos

$$(12) \quad \begin{aligned} |\{Sf(x) > 2\lambda\}| &\leq |\{M_n Tf(x) > 2\lambda\}| \leq \\ &\frac{2}{\lambda} \int_{|Tf| > \lambda} |Tf(x)| dx \\ &\leq 2c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left[1 + \left(\log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{n-1} \right] dx. \end{aligned}$$

De este modo hemos demostrado el Teorema Maximal Fuerte debido a Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund. Estimamos que esta demostración del Teorema Maximal Fuerte supera en brevedad a todas las conocidas.

Generalización del Teorema Maximal Fuerte

En 1984, Richard J. Bagby y Douglas S. Kurtz demostraron un teorema que generaliza el Teorema Maximal Fuerte y que enunciaremos luego de introducir algunas definiciones a tal efecto.

Una función $\omega(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ localmente integrable se dice que satisface a la condición A_1 fuerte, si existe una constante c tal que

$$\frac{1}{|R|} \int_R \omega(x) dx \leq c \inf_{x \in R} \omega(x),$$

donde R es un rectángulo genérico n dimensional de aristas paralelas a los ejes.

Diremos que una función $\omega(x), x \in \mathbb{R}^n$ localmente integrable, satisface a la condición A_p fuerte, $1 < p < \infty$, si existe una constante c tal que

$$\left(\frac{1}{|R|} \int_R \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|R|} \int_R \omega(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq c$$

donde R es un rectángulo genérico de aristas paralelas a los ejes.

Teorema Maximal Fuerte Generalizado (Bagby-Kurtz)

Si $\omega(x) \geq 0$ satisface a la condición A_1 fuerte, entonces

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : Sf(x) > 2\lambda\}) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left[1 + \left(\log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{n-1} \right] \omega(x) dx,$$

donde para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ medible

$$\omega(A) = \int_A \omega(x) dx.$$

Hacemos notar que este teorema puede ser demostrado por nuestro Teorema de Extrapolación por el mismo procedimiento utilizado para la prueba del Teorema Maximal Fuerte.

Teorema Maximal Fuerte Vectorial

En colaboración con el Dr. Cristian Gutiérrez, en un trabajo que será publicado en el Rocky Mountain Journal of Mathematics, hemos obtenido el siguiente teorema que es una extensión vectorial del teorema de Bagby-Kurtz.

Previo a su enunciado introduciremos la notación necesaria.

Si $1 < q < \infty$ y si (f_1, \dots, f_k, \dots) es una sucesión de funciones definidas en \mathbb{R}^n diremos que la función vectorial toma valores en el espacio l^q , si:

$$|f(x)|_q = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|^q \right)^{1/q} < \infty,$$

para todo punto x perteneciente a \mathbb{R}^n . Para tales funciones definimos el operador maximal fuerte vectorial S por

$$Sf = (Sf_1, \dots, Sf_k, \dots).$$

Teorema Maximal Fuerte Vectorial

Sea $1 < q < \infty$.

(i) Si $\omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, satisface a la condición A_1 fuerte, entonces existe una constante c_1 tal que, para todo $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} & \omega(\{x \in \mathbb{R}^n : |Sf(x)|_q > \lambda\}) \\ & \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|_q}{\lambda} \left[1 + \left(\log^+ \frac{|f(x)|_q}{\lambda} \right)^{n-1} \right] \omega(x) dx. \end{aligned}$$

ii) Si $1 < p < \infty$ y si $\omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, satisface a la condición A_p fuerte, entonces existe una constante c_p tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Sf(x)|_q^p \omega(x) dx \leq c_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q^p \omega(x) dx.$$

Este teorema puede ser demostrado utilizando al efecto la forma vectorial de nuestro Teorema de Extrapolación, si bien la demostración original, que figura en el trabajo a publicarse, se basa en métodos completamente diferentes.

VALENCIA INTERMEDIA: UN BANCO DE PRUEBAS PARA LA CIENCIA DE MATERIALES *

por *Blas Alascio*

El propósito de esta Conferencia es mostrar como el estudio de los materiales llamados de Valencia Intermedia puede contribuir al conocimiento general de la ciencia de materiales. Conviene aclarar que cuando nos referimos a ciencias de materiales usamos el término en su sentido más general: la ciencia que trata de explicar todas las propiedades de la materia condensada a partir de los primeros principios. En la práctica, y como primer paso, esto se reduce a explicar estas propiedades tomando como base punto de partida la física atómica, que nos proporciona un conocimiento más o menos detallado de los elementos que constituyen la materia.

Si pudieramos efectivamente entender como las propiedades ópticas, mecánicas, electrónicas etc., resultan en los materiales a consecuencia de los átomos que los constituyen, esto nos permitiría diseñar materiales con propiedades que puedan ser especificadas de antemano. Las preguntas elementales que vienen primero a la mente y que deberíamos responder son:

- a) ¿Hasta qué punto es posible elegir las propiedades del material? Por ejemplo, ¿es posible encontrar materiales superconductores a temperatura ambiente?
- b) ¿Qué materiales es necesario combinar para obtener una dada propiedad?; ¿es posible, por ejemplo, construir materiales magnéticos a partir de átomos no magnéticos?
- c) ¿Las propiedades quedan determinadas solamente por la proporción de cada uno de los elementos presentes en un material?; ¿o también es de importancia la distribución especial en que se combinan?

Para responder a estas preguntas es necesario conocer que modificaciones sufren los átomos de los diferentes elementos que forman un sólido, y como dependen estas modificaciones de los elementos mismos que se combinan. El primer punto de importancia viene del estudio de la física atómica. Sabemos que la estructura electrónica de los átomos es tal que sólo unos pocos electrones de cada átomos sufren modifica-

* Premio Teófilo Isandé, Bienio 1982-83 (Día 8 de Noviembre de 1985).

ciones importantes cuando estos átomos se combinan para formar un sólido o una molécula. Los electrones se disponen en capas alrededor del núcleo y solamente una fracción de ellos, los contenidos en las capas más externas modifican sustancialmente su estado cuando se forma un sólido. Estos son los electrones de valencia.

Por ejemplo en la plata solamente dos de los electrones que forman el átomo se desprenden del mismo y quedan libres para trasladarse en el cristal. Esto hace que la plata sea un metal y la reducción de energía de esos electrones al liberarse constituye la energía de cohesión de metal. En los cristales iónicos uno o dos electrones se desprenden de los cationes pero quedan íntimamente ligados a los aniones. Estos iones se atraen por la fuerza de Coulomb y es esta energía Coulombiana la que determina la energía de cohesión de los cristales iónicos y sus propiedades mecánicas.

Idealmente para estudiar como ocurren estos cambios en la estructura atómica se podría pensar en disponer los átomos en la distribución espacial correspondiente al sólido, pero congelando la estructura electrónica. Una vez que esto se logró ir lentamente descongelando la estructura electrónica para ir estudiando paso a paso los cambios que ocurren. Otra alternativa, tan irreal como la primera sería disponer los átomos en la estructura espacial de un cristal, pero suficientemente alejados entre ellos para que no hayan ocurrido cambios en las capas electrónicas y dejarlos acercarse lentamente para de nuevo ir estudiando gradualmente los cambios que tienen lugar hasta que los átomos alcanzan las distancias de equilibrio en el sólido. Desafortunadamente estos experimentos son sólo posibles en la imaginación del investigador. Los elementos forman gases, líquidos y sólidos por transformaciones naturales que no podemos controlar más que en escala macroscópica. En sus estados naturales los cambios en la estructura electrónica ya han tenido lugar:

Los sistemas de valencia intermedia nos permiten, en alguna medida, controlar el número de electrones que participan en la formación del sólido y es ésta una de las características que los hace tan particularmente interesantes. Para entender esta propiedad de los sistemas de valencia intermedia es necesario retornar al análisis de las capas electrónicas de los átomos que constituyen el sólido. Mientras en la mayor parte de los sólidos los electrones que han modificado su estado para contribuir a la energía de formación del sólido provienen de capas externas, alejadas del núcleo atómico, en los sistemas de valencia existen átomos —en general tierras raras— que participan de la cohesión también con algunos electrones que provienen de capas internas, y que por razones de mecánica cuántica pueden desligarse de su núcleo más fácilmente que otros electrones más externos que también forman parte del átomo.

Estos electrones internos son los contenidos en la capa 4f de las

tierras raras que por la misma razón de pertenecer a una capa interna, mantienen sus características atómicas aún cuando el átomo forma parte de un sólido. En la figura 1 se muestra la distribución espacial de las diferentes capas electrónicas menos ligadas de una tierra rara típica. Si bien los electrones 5d y 6s más externos y menos ligados ya modificaron sus estados en la fase sólida los electrones 4f son protegidos del efecto de otros átomos por los electrones 5s y 5p que están muy fuertemente ligados aún cuando espacialmente son más externos que los 4f. Por esta razón, la situación para los 4f en un sólido es similar a la de los electrones externos cuando los átomos están suficientemente separados: su estado recién comienza a modificarse cuando las distancias interatómicas corresponden a las distancias que estabilizan el estado sólidos. Esto hace que pequeñas modificaciones que podemos provocar por fuerzas de laboratorio —presión, campos magnéticos, por ejemplo— modifiquen sustancialmente el número de electrones que participan en la formación del sólido y que cambian dramáticamente las propiedades del mismo.

En lo que sigue daremos algunos ejemplos de cómo se modifican algunas de estas propiedades en sistemas típicos de valencia intermedia.

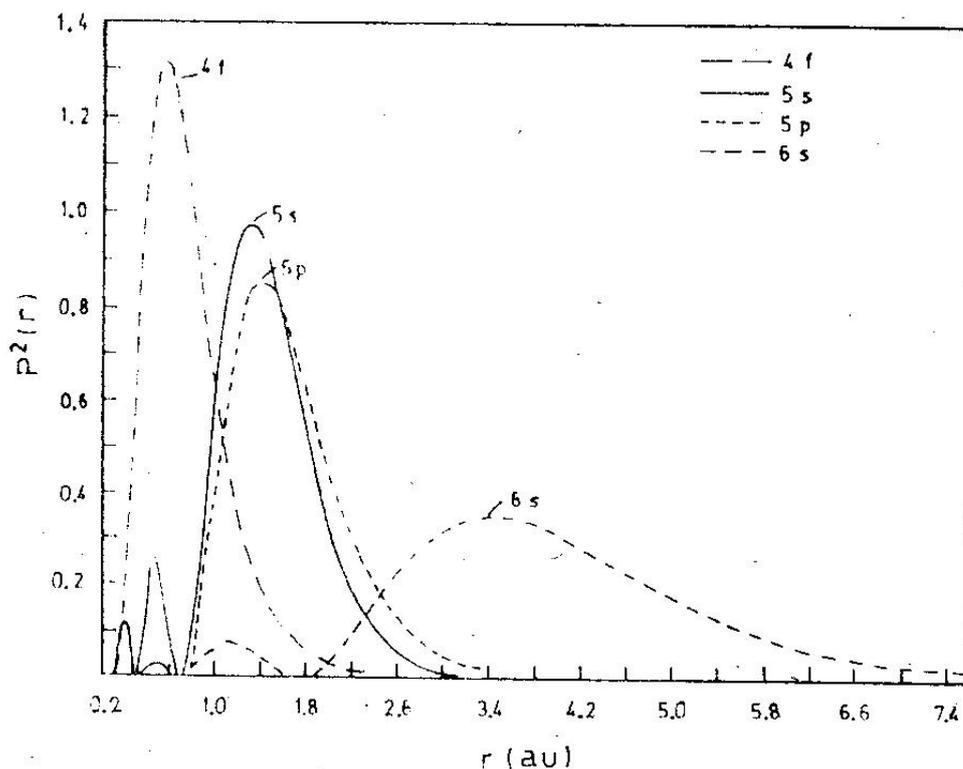


Fig. 1. — Distribución espacial de la densidad de carga electrónica en gd^{3+} .
Nótese la localización interna de los electrones 4f.

Propiedades elásticas

El sulfuro de samerio (SmS) sufre a temperatura ambiente una transformación fundamental bajo una presión de 6 Kbar. (unas 6000 atmósferas) desde el punto de vista de sus propiedades elásticas, por debajo de 6 Kbar, es un material iónico típico, distancias interatómicas están determinadas por la competencia entre fuerzas de repulsión de Born-Mayer de corto alcance y la atracción Coulombiana de largo alcance entre los iones de Sm y S. Por encima de 6 Kbar, es el único material reconocido * que tiene menos resistencia a una fuerza de compresión que a una fuerza de torsión. En efecto, la relación entre la frecuencia de las ondas mecánicas que se pueden propagar en este material y su número de onda cambia sustancialmente cuando la presión se hace mayor que 6 Kbar. Esto se muestra en la figura 2, donde se muestran los diferentes modos de vibración del SmS.

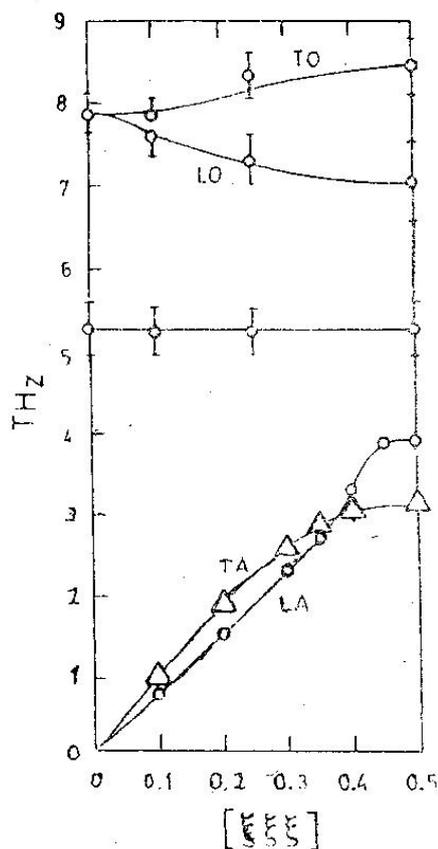


Fig. 2. — Relaciones de dispersión de fonones en la dirección (111) del SmS determinadas por dispersión de neutrones. El modo longitudinal acústico (LA) resulta ser más blando que el modo transversal acústico (TA) ésta es la característica especial que se encuentra solamente en SmS.

* Es posible que el TmSe acompañe al SmS en esta propiedad.